

# Poursuite de l'atelier « Comment bien voter ? » en classe

On trouvera ici quelques pistes pour poursuivre l'atelier « Comment bien voter ? »  
Le but est de prouver quelques assertions de l'atelier : soit que des propriétés sont bien vérifiées par des modes de scrutin, soit de trouver des contre-exemples pour montrer qu'elles ne sont pas vérifiées. On rappelle tout d'abord les **propriétés** et on balaie quelques **modes de scrutin** (ceux vus dans l'atelier et deux nouveaux). Pour chacun de ceux-ci, on regarde quelles propriétés sont vérifiées et lesquelles ne le sont pas.

Ce sont des pistes pour un **travail d'approfondissement** qui peut bien sûr prendre diverses formes : travail collectif, individuel. On peut piocher dans les questions, les ouvrir ou les fermer (en particulier en donnant ou pas les contre-exemples), donner plus ou moins d'indications. On trouvera toutes les **corrections** à la fin.

Pour toute question (ou erreur), vous pouvez écrire à : [druet@math.univ-lyon1.fr](mailto:druet@math.univ-lyon1.fr)

Pour aller plus loin, on peut consulter le très beau livre [Comment être élu à tous les coups ?](#) de Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland, source d'inspiration pour l'atelier et ce document.

**Thématique** : théorie de la décision, théorie du choix social, économie

**Niveau scolaire** : lycée

## Sommaire

<b>L'exemple de l'atelier</b>	<b>3</b>
<b>Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?</b>	<b>4</b>
<b>Propriétés des modes de scrutin</b>	<b>5</b>
1. Le tableau des duels	5
2. Vainqueur de Condorcet	5
3. Perdant de Condorcet	5
4. Monotonie	6
5. Consistance aux rassemblements	6
6. Incitation à la participation	6
7. Indépendance vis-à-vis des autres plats	6
<b>Le scrutin uninominal majoritaire à un tour</b>	<b>8</b>
1. Définition	8
2. Exemple de l'atelier	8
3. Propriétés vérifiées	8
4. Propriétés non vérifiées	8
5. Discussion	8



<b>Le scrutin uninominal majoritaire à deux tours</b>	<b>9</b>
1. Définition	9
2. Exemple de l'atelier	9
3. Propriétés vérifiées	9
4. Propriétés non vérifiées	9
5. Discussion	10
<b>Scrutin de Bucklin</b>	<b>11</b>
1. Définition	11
2. Exemple de l'atelier	11
3. Propriétés vérifiées	12
4. Propriétés non vérifiées	12
5. Discussion	13
<b>Scrutin de Borda</b>	<b>14</b>
1. Définition	14
2. Exemple de l'atelier	14
3. Propriétés vérifiées	14
4. Propriétés non vérifiées	14
5. Discussion	15
<b>Scrutin de Nanson</b>	<b>16</b>
1. Définition	16
2. Exemple de l'atelier	16
3. Propriétés vérifiées	17
4. Propriétés non vérifiées	17
5. Discussion	18
<b>Scrutin d'élimination par le bas</b>	<b>19</b>
1. Définition	19
2. Exemple de l'atelier	19
3. Propriétés vérifiées	19
4. Propriétés non vérifiées	19
5. Discussion	19
<b>Correction ou pistes de correction</b>	<b>20</b>
1. Sur les propriétés des modes de scrutin	20
2. Scrutin uninominal majoritaire à un tour	20
3. Scrutin uninominal majoritaire à deux tours	21
4. Scrutin de Bucklin	23
5. Scrutin de Borda	27
6. Scrutin de Nanson	28
7. Scrutin d'élimination successive par le bas	31

Document créé par Olivier Druet.

Remerciements à Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland.



## L'exemple de l'atelier

<b>Votant-es 1 à 4</b> 1. sushi 2. spaghetti 3. pizza 4. wrap 5. burger	<b>Votant-e 5</b> 1. wrap 2. pizza 3. spaghetti 4. burger 5. sushi	<b>Votant-e 6</b> 1. pizza 2. spaghetti 3. burger 4. wrap 5. sushi
<b>Votant-es 7 à 9</b> 1. burger 2. pizza 3. wrap 4. spaghetti 5. sushi	<b>Votant-e 10</b> 1. sushi 2. burger 3. spaghetti 4. pizza 5. wrap	<b>Votant-es 11 et 12</b> 1. pizza 2. burger 3. spaghetti 4. wrap 5. sushi
<b>Votant-e 13</b> 1. spaghetti 2. burger 3. pizza 4. wrap 5. sushi	<b>Votant-es 14 et 15</b> 1. wrap 2. burger 3. pizza 4. spaghetti 5. sushi	<b>Votant-e 16</b> 1. sushi 2. spaghetti 3. pizza 4. burger 5. wrap
<b>Votant-e 17</b> 1. wrap 2. burger 3. spaghetti 4. pizza 5. sushi	<b>Votant-es 18 et 19</b> 1. spaghetti 2. wrap 3. pizza 4. burger 5. sushi	

## Qu'est-ce qu'un mode de scrutin ?

Un **mode de scrutin** (dans ce document) est une procédure pour élire un·e candidat·e (ici un plat) à partir des classements de chaque votant·e.

Nous supposons que tous·tes les votant·es ont un ordre de préférence de 1 à 5 (s'il y a 5 plats).

Officiellement, dans un mode de scrutin, une procédure de départage doit être donnée au préalable en cas d'égalité. Dans tout ce qui suit, nous nous arrangerons pour qu'il n'y ait pas d'égalité.

On pourrait aussi demander à un mode de scrutin de fournir une liste classée des différents plats en sortie mais nous nous contenterons d'élire un plat, sans nous occuper du classement des suivants.

Certaines propriétés souhaitables des modes de scrutin devraient être vérifiées si possible.

### Trois propriétés seront vérifiées par tous les modes de scrutin de la suite :

- *unanimité* : si tous·tes les votant·es classent en première position le même plat, celui-ci doit être choisi par le mode de scrutin.
- *anonymat* : les votant·es sont anonymes. On ne sait pas qui a voté quoi. Donc tous·tes les votant·es ont le même poids. Si on échange les préférences de deux votant·es, cela doit donner le même résultat.
- *universalité* : on admet tous les classements possibles à titre individuel pour les votant·es.



# Propriétés des modes de scrutin

## 1. Le tableau des duels

Il est intéressant de rassembler dans un tableau tous les duels deux à deux entre les plats. On prend deux plats (par exemple pizza et burger) et on compte combien de votant·es ont placé pizza devant burger. On peut rassembler tous ces résultats dans un grand tableau pour l'exemple de l'atelier :

	Pizza	Burger	Sushi	Wrap	Spaghetti
Pizza	X	11	13	13	9
Burger	8	X	13	9	9
Sushi	6	6	X	6	6
Wrap	6	10	13	X	7
Spaghetti	10	10	13	12	X

Celui-ci se lit ainsi :

- La pizza gagne contre le burger 11 fois sur 19.
- Le burger gagne contre la pizza 8 fois sur 19.
- En rouge nous avons indiqué les duels gagnés par le plat à gauche.

## 2. Vainqueur de Condorcet

Un plat vainqueur de Condorcet est un plat qui remporte tous ses duels. C'est le cas des spaghetti dans l'exemple de l'atelier. Cela n'existe pas forcément.

→ Trouver un exemple d'ensemble de votant·es avec seulement trois plats dans lequel il n'y a pas de vainqueur de Condorcet.

Mais s'il y a un plat vainqueur de Condorcet, il peut être souhaitable qu'il soit élu.

Un scrutin vérifie la **propriété du vainqueur de Condorcet** s'il élit le vainqueur de Condorcet quand il existe.

## 3. Perdant de Condorcet

Un plat perdant de Condorcet est un plat qui perd tous ses duels. C'est le cas des sushis dans l'exemple de l'atelier.

Cela n'existe pas forcément.

→ Trouver un exemple de votant·es avec trois plats où il n'y a pas de perdant de Condorcet.



Quand il y a un perdant de Condorcet, il peut être souhaitable que celui-ci ne soit pas élu.

Un scrutin vérifie la **propriété du perdant de Condorcet** s'il n'élit jamais le perdant de Condorcet quand il existe.

#### 4. Monotonie

Si un plat est élu avec les classements des votant·es et si ce plat remonte dans le classement d'un·e ou plusieurs votant·es sans baisser dans les classements des autres votant·es et sans que le reste des classements ne change, il doit de nouveau être élu avec ces nouveaux choix des votant·es. C'est la **propriété de monotonie**.

Par exemple (dans le cas de l'atelier), si la pizza est élue avec un mode de scrutin et si les votant·es 1 à 4 remontent la pizza en 2ème position sans changer le reste, la pizza doit toujours être élue.

#### 5. Consistance aux rassemblements

Si on applique le mode de scrutin à deux sous-ensembles des votant·es et que cela donne le même plat vainqueur pour les deux sous-ensembles, alors ce même mode de scrutin doit donner ce même vainqueur si on rassemble les deux sous-ensembles en un seul ensemble.

Par exemple (dans le cas de l'atelier), si un mode de scrutin donne pour vainqueur le burger en ne prenant que les votant·es 1 à 10 et donne aussi pour vainqueur le burger en prenant les votant·es 11 à 19, ce mode de scrutin devrait donner également le burger comme vainqueur avec tous·tes les votant·es (de 1 à 19).

C'est ce qu'on appelle la propriété de **consistance aux rassemblements**.

#### 6. Incitation à la participation

Nul·le votant·e ne doit avoir intérêt à ne pas participer au vote. L'abstention ne doit pas permettre à un·e votant·e de faire élire un plat qu'il préfère plus que celui élu quand iel vote.

Par exemple (dans le cas de l'atelier), si un mode de scrutin élit la pizza et que le·la votant·e 7 s'abstient, ce même mode de scrutin ne devrait pas élire le burger sans le·la votant·e 7 car iel préfère le burger à la pizza et son abstention aurait amélioré le résultat de son point de vue.

Un mode de scrutin qui vérifie cette propriété est dit vérifier l'**incitation à la participation**.

#### 7. Indépendance vis-à-vis des autres plats

Si un plat est ajouté et vient donc s'insérer dans les préférences des votant·es (sans changer l'ordre de préférence entre les autres plats), soit ce nouveau plat devient vainqueur,



soit cela ne change pas le plat vainqueur. L'apparition d'une alternative ne doit pas changer le vainqueur du scrutin sauf à ce que cette alternative soit élue.

Un mode de scrutin qui vérifie cette propriété est dit vérifier l'***indépendance aux alternatives***.



# Le scrutin uninominal majoritaire à un tour

## 1. Définition

On compte le nombre de fois que chaque plat est arrivé en première position pour les votant·es. Le plat élu est celui qui est arrivé le plus souvent en première position.

## 2. Exemple de l'atelier

Les sushis arrivent 6 fois en première position (votant·es 1-2-3-4-10-16), le burger arrive 3 fois en première position (votant·es 7-8-9), la pizza arrive 3 fois en première position (votant·es 6-11-12), les spaghettis arrivent 3 fois en première position (votant·es 13-18-19) et le wrap arrive 4 fois en première position (votant·es 5-14-15-17).

Les sushis sont donc élus.

## 3. Propriétés vérifiées

- Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à un tour vérifie la propriété de monotonie.
- Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à un tour vérifie la propriété de consistance aux rassemblements.
- Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à un tour vérifie l'incitation à la participation.

## 4. Propriétés non vérifiées

Pour montrer qu'une propriété n'est pas vérifiée par un mode de scrutin, il suffit de trouver un contre-exemple.

- Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à un tour peut élire un perdant de Condorcet et n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet.
- Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à un tour ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives.

## 5. Discussion

- Discuter des avantages et inconvénients de ce mode de scrutin.





# Le scrutin uninominal majoritaire à deux tours

## 1. Définition

**Premier tour** : on compte le nombre de fois que chaque plat est arrivé en première position pour les votant·es. Les deux plats arrivés le plus souvent en première position sont sélectionnés, les autres sont éliminés.

**Deuxième tour** : on regarde le duel entre les deux sélectionnés. Le vainqueur du scrutin est le vainqueur de ce duel.

*Remarque* : parfois, on dit que si, au premier tour, un plat a la majorité absolue, il est directement élu sans faire de deuxième tour. Mais, dans ce cas, il gagnera son duel au deuxième tour donc on peut oublier cette situation.

## 2. Exemple de l'atelier

Au premier tour, les sushis arrivent 6 fois en première position (votant·es 1-2-3-4-10-16), le burger arrive 3 fois en première position (votant·es 7-8-9), la pizza arrive 3 fois en première position (votant·es 6-11-12), les spaghettis arrivent 3 fois en première position (votant·es 13-18-19) et le wrap arrive 4 fois en première position (votant·es 5-14-15-17).

Le wrap et les sushis sont donc sélectionnés pour le deuxième tour. Dans le duel entre sushis et wrap, le wrap gagne par 13 à 6. Donc le wrap est élu.

## 3. Propriétés vérifiées

→ Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne peut pas élire un perdant de Condorcet.

## 4. Propriétés non vérifiées

Pour montrer qu'une propriété n'est pas vérifiée par un mode de scrutin, il suffit de trouver un contre-exemple.

→ Montrer que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet.

→ Sur le scrutin de l'atelier, enlever le choix pizza et refaire le scrutin. En déduire que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives.



Pour les autres propriétés, nous allons utiliser un autre ensemble de votant·es avec seulement trois plats :

Votant·e 1 : Pizza - Burger - Wrap  
Votant·e 2 : Pizza - Burger - Wrap  
Votant·e 3 : Pizza - Burger - Wrap  
Votant·e 4 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 5 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 6 : Burger - Pizza - Wrap  
Votant·e 7 : Burger - Pizza - Wrap  
Votant·e 8 : Burger - Pizza - Wrap  
Votant·e 9 : Burger - Pizza - Wrap  
Votant·e 10 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 11 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 12 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 13 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 14 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 15 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 16 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 17 : Wrap - Pizza - Burger

- Faire le tableau des duels. Y a-t-il un vainqueur de Condorcet ? Y a-t-il un perdant de Condorcet ?
- Déterminer le vainqueur avec le mode de scrutin uninominal majoritaire à deux tours.
- Si les votant·es 16 et 17 changent leurs votes en burger - wrap - pizza, que se passe-t-il ? En déduire que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne vérifie pas la propriété de monotonie.
- Trouver deux votant·es qui auraient intérêt à ne pas voter pour voir le résultat du scrutin donner un meilleur résultat à leur goût.
- Considérer les deux sous-ensembles 1-2-3-10-11-12-13-14 et 4-5-6-7-8-9-15-16-17. Établir les vainqueurs par le mode de scrutin uninominal majoritaire à deux tours pour ces deux sous-ensembles de votant·es et en déduire que ce mode de scrutin ne vérifie pas la consistance aux rassemblements.

## 5. Discussion

- Discuter des avantages et inconvénients de ce mode de scrutin.



# Scrutin de Bucklin

Pour ce mode de scrutin, nous avons besoin de rappeler la définition de la **majorité absolue**. S'il y a  $n$  votant·es, c'est la partie entière de  $\frac{n}{2} + 1$ .

## 1. Définition

Au premier tour, on compte le nombre de fois où chaque plat est arrivé en première position pour les votant·es. Si un plat a plus que la majorité absolue, il est élu. Sinon, on fait un deuxième tour.

Au deuxième tour, on compte le nombre de fois que chaque plat est arrivé en première ou deuxième position pour les votant·es. Le plat ayant le plus de voix est élu s'il dépasse la majorité absolue (la partie entière de  $\frac{n}{2} + 1$ , on garde cette même majorité absolue tour après tour).

Si aucun plat n'a dépassé la majorité absolue, on fait un troisième tour en tenant compte du nombre de fois où chaque plat est arrivé en première, deuxième ou troisième position. Le plat ayant le plus de voix est élu s'il dépasse la majorité absolue. S'il n'y en a pas, on fait un quatrième tour, etc.

→ Montrer qu'avec 5 plats, il y aura maximum 3 tours, c'est-à-dire que nécessairement, un plat aura dépassé la majorité absolue avant de faire un quatrième tour. Généraliser dans le cas de  $p$  plats.

## 2. Exemple de l'atelier

Au premier tour, on compte le nombre de fois où chaque plat est arrivé en première position pour les votant·es. On trouve :

Sushis : 6  
Wrap : 4  
Pizza : 3  
Burger : 3  
Spaghetti : 3

Aucun plat ne dépasse 10, la majorité absolue, donc il faut faire un deuxième tour. On ajoute alors le nombre de fois où les plats arrivent en deuxième position. On trouve alors :

Sushis : 6  
Wrap : 6  
Pizza : 7  
Burger : 10  
Spaghetti : 9

Le burger est le seul à avoir la majorité absolue et est élu.



### 3. Propriétés vérifiées

→ Montrer que ce scrutin vérifie la propriété de monotonie.

### 4. Propriétés non vérifiées

→ Montrer avec l'exemple de l'atelier que ce mode de scrutin n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet.

→ Montrer que le-la votant·e 11, dans l'exemple de l'atelier, a intérêt à ne pas aller voter et que le résultat n'en sera que plus à son goût. En déduire que le scrutin de Bucklin n'incite pas à la participation.

Considérons l'ensemble des 11 votant·es suivant·es (avec trois plats) :

Votant·e 1 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 2 : Pizza - Wrap - Burger

Votant·e 3 : Burger - Pizza - Wrap

Votant·e 4 : Burger - Pizza - Wrap

Votant·e 5 : Burger - Pizza - Wrap

Votant·e 6 : Burger - Wrap - Pizza

Votant·e 7 : Burger - Wrap - Pizza

Votant·e 8 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 9 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 10 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 11 : Wrap - Burger - Pizza

→ Faire le tableau des duels. Y a-t-il un vainqueur de Condorcet ? Y a-t-il un perdant de Condorcet ?

→ Faire l'élection suivant le scrutin de Bucklin. En déduire que le scrutin de Bucklin n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet et peut même élire un perdant de Condorcet.

→ Imaginer que le burger se désiste. On garde les mêmes ordres de préférence pour tout le monde entre les deux plats restants. Qui gagne le scrutin de Bucklin ? En déduire que le scrutin de Bucklin ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives.

Pour la consistance aux rassemblements, on va considérer les deux ensembles de votant·es suivants :

Premier ensemble :

Votant·e 1 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 2 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 3 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 4 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 5 : Burger - Pizza - Wrap

Votant·e 6 : Burger - Pizza - Wrap



Votant·e 7 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 8 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 9 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 10 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 11 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 12 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 13 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 14 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 15 : Wrap - Pizza - Burger  
Votant·e 16 : Wrap - Burger - Pizza  
Votant·e 17 : Wrap - Burger - Pizza

Deuxième ensemble :

Votant·e 18 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 19 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 20 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 21 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 22 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 23 : Pizza - Wrap - Burger  
Votant·e 24 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 25 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 26 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 27 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 28 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 29 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 30 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 31 : Burger - Wrap - Pizza  
Votant·e 32 : Wrap - Pizza - Burger

→ Qui est élu avec le mode de scrutin de Bucklin dans le premier ensemble ? Dans le deuxième ensemble ? Et si on réunit tous·tes les votant·es ? Qu'en déduit-on ?

## 5. Discussion

→ Discuter des avantages et inconvénients de ce mode de scrutin.



# Scrutin de Borda

## 1. Définition

Si on a  $p$  plats, on compte le total de points par plat sachant qu'une première place vaut  $p - 1$ , une deuxième place  $p - 2$ , etc. jusqu'à une avant-dernière place qui vaut 1 point. Le plat ayant le plus de points est élu.

## 2. Exemple de l'atelier

Les sushis arrivent 6 fois en première place et 13 fois en dernière place. Ils ont donc  $6 \times 4 = 24$  points.

Le wrap arrive 4 fois en première position, 2 fois en deuxième position, 3 fois en troisième position, 8 fois en quatrième position. Le wrap a donc :  
 $4 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 8 \times 1 = 36$  points.

Le burger arrive 3 fois en première position, 7 fois en deuxième position, 1 fois en troisième position, 4 fois en quatrième position. Le burger a donc :  
 $3 \times 4 + 7 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 1 = 39$  points.

Les spaghetti arrivent 3 fois en première position, 6 fois en deuxième position, 5 fois en troisième position, 5 fois en quatrième position. Les spaghetti ont donc :  
 $3 \times 4 + 6 \times 3 + 5 \times 2 + 5 \times 1 = 45$  points.

La pizza arrive 3 fois en première position, 4 fois en deuxième position, 10 fois en troisième position, 2 fois en quatrième position. La pizza a donc :  
 $3 \times 4 + 4 \times 3 + 10 \times 2 + 2 \times 1 = 46$  points.

C'est la pizza qui est élue puisque c'est elle qui a le plus de points.

## 3. Propriétés vérifiées

- Montrer que le scrutin de Borda vérifie la propriété de consistance aux rassemblements.
- Montrer que le scrutin de Borda vérifie la propriété de monotonie.
- Montrer que le scrutin de Borda ne fera jamais élire un perdant de Condorcet<sup>1</sup>.

## 4. Propriétés non vérifiées

- Montrer que le scrutin de Borda n'élit pas nécessairement le vainqueur de Condorcet.

---

<sup>1</sup> Attention ! C'est difficile sans indications et pas évident avec.



Considérons maintenant l'exemple suivant :

Votant·e 1 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 2 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 3 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 4 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 5 : Pizza - Burger - Wrap

Votant·e 6 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 7 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 8 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 9 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 10 : Wrap - Pizza - Burger

Votant·e 11 : Wrap - Pizza - Burger

- Qui est élu avec le scrutin de Borda ?
- Trouver un des deux autres plats non vainqueurs qui, en se désistant, permettrait de changer le résultat du scrutin de Borda. Qu'en déduit-on ?

## 5. Discussion

- Discuter des avantages et inconvénients de ce mode de scrutin.

# Scrutin de Nanson

## 1. Définition

On commence par faire un premier tour comme dans Borda, c'est-à-dire en comptant la totalité des points obtenus par chaque plat sachant qu'une première place vaut  $p - 1$ , une deuxième place  $p - 2$ , etc. jusqu'à une avant-dernière place qui vaut 1 point.

On élimine alors tous les plats qui n'obtiennent pas la moyenne. Avec  $p$  plats, la moyenne est de :

$$\frac{(p-1)+(p-2)+\dots+1}{p} = \frac{p-1}{2}$$

On élimine donc tous les candidats qui ont strictement moins de  $n \frac{p-1}{2}$  points s'il y a  $n$  votant·es.

Puis on fait un deuxième tour de la même façon en enlevant des classements les plats éliminés. Puis un troisième tour, etc., jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

## 2. Exemple de l'atelier

Au premier tour (cf. scrutin de Borda), les plats obtiennent les points suivants :

Sushis : 24 points.

Wrap : 36 points.

Burger : 39 points.

Spaghetti : 45 points.

Pizza : 46 points.

La moyenne est de 2 points et il y a 19 votant·es. Tous les plats ayant strictement moins de 38 points sont éliminés, c'est-à-dire les sushis et le wrap.

Restent en lice pour le second tour burger, spaghetti et pizza. Reprenons les classements des votant·es en enlevant les deux plats éliminés.





<b>Votant-es 1 à 4</b>	<b>Votant-e 5</b>	<b>Votant-e 6</b>
1. spaghetti 2. pizza 3. burger	1. pizza 2. spaghetti 3. burger	1. pizza 2. spaghetti 3. burger
<b>Votant-es 7 à 9</b>	<b>Votant-e 10</b>	<b>Votant-es 11 et 12</b>
1. burger 2. pizza 3. spaghetti	1. burger 2. spaghetti 3. pizza	1. pizza 2. burger 3. spaghetti
<b>Votant-e 13</b>	<b>Votant-es 14 et 15</b>	<b>Votant-e 16</b>
1. spaghetti 2. burger 3. pizza	1. burger 2. pizza 3. spaghetti	1. spaghetti 2. pizza 3. burger
<b>Votant-e 17</b>	<b>Votant-es 18 et 19</b>	
1. burger 2. spaghetti 3. pizza	1. spaghetti 2. pizza 3. burger	

Pour le deuxième tour, les plats obtiennent donc les points suivants :

Burger : 17 points

Pizza : 20 points

Spaghetti : 20 points

Comme le nombre de points à obtenir pour passer le tour est de 19 points, ce sont les burgers qui sont éliminés.

Au troisième tour, il ne reste plus que pizza et spaghetti et le scrutin de Borda revient dans ce cas à un duel, remporté par les spaghetti.

Ce sont les spaghetti qui sont élus avec ce mode de scrutin.

### 3. Propriétés vérifiées

- Montrer que le scrutin de Nanson n'élit jamais un perdant de Condorcet.
- Montrer que le scrutin de Nanson élit toujours un vainqueur de Condorcet.

### 4. Propriétés non vérifiées

- Montrer que le scrutin de Nanson ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives.
- Montrer que le scrutin de Nanson ne vérifie pas la propriété de monotonie.
- Montrer que le scrutin de Nanson ne vérifie pas l'incitation à la participation.



→ Montrer que le scrutin de Nanson ne vérifie pas la consistance aux rassemblements.

## 5. Discussion

→ Discuter des avantages et inconvénients de ce mode de scrutin.



# Scrutin d'élimination par le bas

*Remarque* : ce mode de scrutin n'est pas très standard mais il est souvent proposé par les élèves. Il peut donc être intéressant de le travailler même si nous allons voir qu'il ne vérifie pas beaucoup de propriétés.

## 1. Définition

Au premier tour, on élimine le plat qui arrive le plus souvent en dernière position. On fait un second tour en reprenant les classements sans le plat éliminé et on élimine le plat qui arrive le plus souvent en dernière position. On continue jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

## 2. Exemple de l'atelier

Au premier tour, les sushis sont éliminés puisqu'ils arrivent 13 fois en dernière position.

Au deuxième tour, comme on a éliminé les sushis, voici le nombre de fois où chaque plat arrive en dernière position : burger (7), spaghetti (5), pizza (1), wrap (6). On élimine donc les burgers.

Au troisième tour, sans sushis et burger, voici le nombre de fois où chaque plat arrive en dernière position : spaghetti (6), pizza (3), wrap (10). On élimine donc les wraps.

Il reste un duel entre spaghetti et pizza, remporté par les spaghettis.

## 3. Propriétés vérifiées

→ Montrer que le scrutin d'élimination par le bas n'élit jamais un perdant de Condorcet.

## 4. Propriétés non vérifiées

→ Montrer que le scrutin d'élimination par le bas n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet.

→ Montrer que le scrutin d'élimination par le bas ne vérifie pas la propriété de monotonie.

→ Montrer que le scrutin d'élimination par le bas ne vérifie pas l'incitation à la participation.

→ Montrer que le scrutin d'élimination par le bas ne vérifie pas la consistance aux rassemblements.

→ Montrer que le scrutin d'élimination par le bas ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives.

## 5. Discussion

→ Discuter des avantages et inconvénients de ce mode de scrutin.



# Correction ou pistes de correction

## 1. Sur les propriétés des modes de scrutin

Il y a beaucoup d'exemples qui permettent de montrer qu'un vainqueur de Condorcet n'existe pas nécessairement. Imaginons que  $a$  votants aient l'ordre de préférence Pizza-Burger-Spaghetti,  $b$  votants aient l'ordre de préférence Burger-Spaghetti-Pizza et  $c$  votants l'ordre de préférence Spaghetti-Pizza-Burger. Si on regarde les duels, on obtient

Pizza vs Burger :  $(a+c) / b$

Burger vs Spaghetti :  $(a+b) / c$

Spaghetti vs Pizza :  $(b+c) / a$

Pour ne pas avoir de vainqueur de Condorcet, et pas de perdant de Condorcet non plus, il suffit d'avoir  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  et  $b + c > a$ .

$a = b = c = 1$  fonctionne mais plein d'autres situations également.

Collectivement, la préférence n'est pas une relation d'ordre, elle ne vérifie pas la transitivité. A titre individuel, sans doute que si. Mais il suffit de s'apercevoir que les critères pour choisir un plat ou un candidat peuvent être multiples, que selon ces critères, l'ordre des plats n'est pas le même et que les critères prépondérants pour chaque votant·e peuvent différer pour se rendre compte que ce paradoxe dit de Condorcet (non transitivité de la préférence collective) n'en est pas vraiment un. Ou en tout cas qu'il est sans doute moins choquant qu'un certain nombre de propriétés qui ne sont pas vérifiées par les divers modes de scrutin.

## 2. Scrutin uninominal majoritaire à un tour

Il vérifie la propriété de monotonie car faire remonter un plat dans un ou plusieurs classements ne peut que lui ajouter des voix (lorsqu'on le fait passer en première position) ou ne rien changer (quand il ne passe pas en première position). Cela ne peut donc pas empêcher ce plat de gagner s'il gagnait avant les remontées.

Il incite à participer car ne pas participer ne fait qu'enlever une voix à son plat préféré et ne change rien pour les autres. Au pire, ne pas participer fait perdre l'élection à notre plat préféré. Au mieux, cela ne change pas le résultat des élections.

Il vérifie la propriété de consistance aux rassemblements car si un plat arrive en première position plus souvent que les autres sur un premier groupe et aussi sur un deuxième, il arrive bien entendu premier sur les deux groupes rassemblés puisque les voix ne font que s'additionner simplement dans ce mode de scrutin.

Il peut élire un perdant de Condorcet, l'exemple étant donné par l'atelier. De plus, dans le cas de l'atelier, il y a un vainqueur de Condorcet et celui-ci n'est pas élu.

Il ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives. Imaginons qu'on ajoute un sixième plat dans l'exemple de l'atelier, la choucroute. Celle-ci vient se placer en 1ère position sur les votant·es 1 à 3 mais en dernière position chez tous·tes les autres. Ce dernier plat aura trois



voix qu'il aura pris aux sushis qui n'en ont donc plus que 3. Cependant, la choucroute ne remporte pas ce premier scrutin puisque Wrap continue à avoir 4 voix et est élu. On a donc changé Sushis en Wrap sous prétexte qu'on a ajouté Choucroute. C'est exactement le même mécanisme qui empêche le scrutin à deux tours de vérifier cette propriété.

Pour la discussion, c'est assez libre et subjectif. Mais ce qui est clair, c'est que le choix fait par ce mode de scrutin peut être assez clivant. C'est l'exemple de l'atelier puisque Sushis arrive en première position chez une majorité relative de votant·es mais arrive en dernière position chez tous·tes les autres. C'est d'ailleurs souvent suite à ce phénomène que certain·es élèves proposent un mode de scrutin avec élimination par le bas. Également, ce mode de scrutin manque de nuances car il ne prend en compte que le premier choix. Finalement, les ordres de préférence au-delà du premier choix ne jouent aucun rôle. Cependant, il vérifie un certain nombre de propriétés (incitation à participer, monotonie, consistance aux rassemblements, etc.)

### 3. Scrutin uninominal majoritaire à deux tours

Le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne peut pas élire un perdant de Condorcet puisqu'il y a un duel au second tour que le perdant de Condorcet ne peut pas gagner.

Par contre, il n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet comme montré par l'exemple de l'atelier.

Lorsqu'on enlève la pizza dans la situation de l'atelier, on ajoute deux voix au burger au premier tour sans changer le reste. On a donc un deuxième tour entre Burger et Sushis que Burger gagne. Ajouter la pizza change donc le plat vainqueur de Burger en Wrap. D'où la non-indépendance aux alternatives.

*Remarque* : on retrouve ce phénomène dans l'appel au vote utile qui demande d'ignorer un·e petit·e candidat·e afin de faire passer au second tour et éventuellement remporter l'élection un·e candidat·e qu'on préfère à celui ou celle qui serait élu·e si on votait au premier tour pour ce·tte candidat·e qui ne gagnerait pas le second tour ou même qui ne passerait de toutes façons pas au second tour. Cet appel au vote utile se retrouve dans quasiment toutes les élections présidentielles en France.

Reprenons l'exemple avec 17 votant·es et trois plats pour trouver des contre-exemples à toutes les autres propriétés. Il existe des contre-exemples plus simples pour l'une ou l'autre de ces propriétés mais cet exemple permet de les traiter toutes. Voici l'exemple :

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es  
Pizza - Wrap - Burger : 2 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap : 4 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 2 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 6 votant·es

Pour le tableau des duels, Burger bat Wrap 9-8, Pizza bat Wrap 9-8 et Pizza bat Burger 11-6. Pizza est donc un vainqueur de Condorcet et Wrap un perdant de Condorcet.



Au premier tour, Burger et Wrap ont chacun 6 voix et passent au second tour que Burger remporte.

Imaginons que deux votant·es du paquet de 6 qui votent Wrap - Pizza - Burger changent leur classement en faisant remonter Burger en première position. On se retrouve alors avec

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es  
Pizza - Wrap - Burger : 2 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap : 6 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 2 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 4 votant·es

et ce sont maintenant Pizza (5 voix) et Burger (8 voix) qui passent au second tour. Pizza gagne le duel 9 à 8. Faire remonter Burger dans le classement de deux votant·es l'a donc empêché de se faire élire. Le scrutin à deux tours ne vérifie donc pas la propriété de monotonie. C'est exactement le même mécanisme qu'on trouvait à l'œuvre dans la fin de l'atelier.

*Remarque* : quand la propriété de monotonie n'est pas satisfaite, on peut la voir dans l'autre sens. Il vaut parfois mieux voter de manière non sincère : faire descendre un plat qu'on veut voir élu dans son classement peut se révéler efficace pour le faire élire.

*Remarque* : ce phénomène peut engendrer un vote tactique. Faire passer un plat qu'on déteste au second tour au lieu d'un autre peut faire élire un meilleur plat pour nous. Il n'est pas du tout exclu que certaines personnes adoptent cette tactique dans les scrutins présidentiels en France.

Pour trouver deux votant·es qui auraient intérêt à ne pas voter, il faut trouver deux personnes qui préféreraient la pizza au burger et qui, en ne votant pas, permettraient à Pizza de passer au second tour au lieu de Wrap. En effet, Pizza, dans son duel avec Burger, a suffisamment de marge pour gagner quand même avec deux voix en moins. Ceci dit, il est clair que ce sont encore deux votant·es du groupe Wrap - Pizza - Burger qui auraient intérêt à s'abstenir puisqu'on aurait alors

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es  
Pizza - Wrap - Burger : 2 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap : 4 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 2 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 4 votant·es

qui verrait Pizza (5 voix) et Burger (6 voix) passer au second tour que Pizza remporterait par 9 voix contre 6.

En considérant les deux sous-ensembles proposés, on a pour le premier

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es  
Pizza - Wrap - Burger : 0 votant·e  
Burger - Pizza - Wrap : 0 votant·e



Burger - Wrap - Pizza : 2 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 3 votant·es

et pour le deuxième

Pizza - Burger - Wrap : 0 votant·es  
Pizza - Wrap - Burger : 2 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap : 4 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 0 votant·e  
Wrap - Pizza - Burger : 3 votant·es

Dans le premier ensemble, Wrap (3 voix) et Pizza (3 voix) passent au second tour que remporte Wrap par 5 voix à 3.

Dans le second ensemble, Burger (4 voix) et Wrap (3 voix) passent au second tour que remporte Wrap par 5 voix à 4.

Dans les deux sous-ensembles, c'est donc Wrap qui remporte l'élection alors que, dans la réunion de ces deux sous-ensembles, c'est Burger. Ce mode de scrutin ne vérifie donc pas la propriété de consistance aux rassemblements.

*Remarque* : c'est ce phénomène qui peut amener ce qu'on appelle le charcutage électoral.

#### **Pour la discussion :**

Ce mode de scrutin est très utilisé en France, on n'imagine même très souvent pas qu'on pourrait en adopter d'autres. Pourtant, il présente de nombreux défauts, par exemple incitation au vote utile ou non sincère. Ces deux phénomènes sont d'autant renforcés que les deux tours ne sont pas simultanés, c'est-à-dire qu'on peut changer de classement entre les deux tours. Même si le théorème de Gibbard et Satterthwaite stipule que tout mode de scrutin ne faisant pas intervenir le hasard (excepté la dictature) est manipulable (c'est-à-dire qu'on peut avoir intérêt à ne pas voter sincèrement pour obtenir un meilleur résultat), certains le sont plus difficilement que d'autres. Le scrutin majoritaire à deux tours n'est pas très difficile à « manipuler » et de nombreux exemples d'appel à ne pas voter sincèrement se présentent lors des élections. On peut aussi discuter des effets de ce mode de scrutin sur les campagnes électorales : par exemple, si je suis sûr·e de passer au second tour, j'ai tout intérêt à pousser un·e adversaire que je suis sûr·e de battre au second tour.

Il ne tient de plus compte que de nos premiers voeux (ou presque), ne prend pas en compte un vrai classement et l'élimination brutale entre le premier tour et le deuxième tour, juste sur le premier choix, peut amener quand même des plats assez clivants à être élu (pas un perdant de Condorcet quand même).

Même s'il est simple à mettre en œuvre et si nous y sommes habitués, ce mode de scrutin est souvent considéré par les spécialistes des modes de scrutin comme un des pires.

#### **4. Scrutin de Bucklin**



Contrairement au scrutin majoritaire à deux tours, le scrutin de Bucklin vérifie la propriété de monotonie. En effet, faire remonter un plat dans les classements des votant·es sans rien changer par ailleurs ne peut que lui faire gagner des voix à partir d'un des tours et dans les suivants et en faire perdre aux autres.

Dans l'exemple de l'atelier, le vainqueur de Condorcet, spaghetti, n'est pas élu.

Dans l'exemple de l'atelier, si le·la votant·e 11 s'abstient, alors pour les deux premiers tours, il suffit d'enlever une voix à ses choix numéros 1 et 2 et on arrive aux résultats suivants :

Pour le premier tour,

Sushis : 6  
Wrap : 4  
Pizza : 2 (3-1)  
Burger : 3  
Spaghetti : 3

Aucun plat ne dépasse 10, ce qui reste la majorité absolue avec 18 votant·es donc il faut faire un deuxième tour. On trouve maintenant

Sushis : 6  
Wrap : 6  
Pizza : 6 (7-1)  
Burger : 9 (10-1)  
Spaghetti : 9

ce qui impose de faire un troisième tour en prenant en compte les 3èmes places :

Sushis : 6  
Wrap : 9  
Pizza : 16  
Burger : 10  
Spaghetti : 14

Trois plats passent la majorité de 10 mais la pizza est élue car c'est ce plat qui compte le plus de voix. Or le·la votant·e 11 préfère la pizza (élue quand iel s'abstient) au burger (élu quand iel vote).

Le scrutin de Bucklin ne vérifie donc pas la propriété d'incitation à la participation.

Pour les autres propriétés, on peut regarder l'exemple fourni dans l'énoncé avec 11 votant·es et trois plats qu'on résumera ainsi :

Pizza - Burger - Wrap : 1 votant·e  
Pizza - Wrap - Burger : 1 votant·e  
Burger - Pizza - Wrap : 3 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 2 votant·es





Wrap - Pizza - Burger : 3 votant·es  
Wrap - Burger - Pizza : 1 votant·e

Les résultats des duels sont les suivants :

Pizza-Burger : 5-6  
Pizza-Wrap : 5-6  
Wrap-Burger : 5-6

Ainsi Pizza est un perdant de Condorcet et Burger un vainqueur de Condorcet. Au premier tour du scrutin de Bucklin, on a :

Pizza : 2 voix  
Burger : 5 voix  
Wrap : 4 voix

Il n'y a pas de majorité absolue (qui est à 6) et il faut donc faire un deuxième tour en ajoutant les secondes places :

Pizza : 8 voix  
Burger : 7 voix  
Wrap : 7 voix

Donc Pizza est élue alors que c'est un perdant de Condorcet.

Si Burger se désiste, on se retrouve avec un duel et Wrap est élu. Le scrutin de Bucklin ne vérifie donc pas l'indépendance aux alternatives.

Pour la consistance aux rassemblements, on va considérer les deux ensembles de votant·es suivants :

Premier ensemble :

Pizza - Burger - Wrap : 4 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap : 2 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 4 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 5 votant·es  
Wrap - Burger - Pizza : 2 votant·es

Deuxième ensemble :

Pizza - Wrap - Burger : 6 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 8 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 1 votant·es

Dans le premier ensemble, le premier tour du scrutin de Bucklin donne

Pizza : 4 voix



Burger : 6 voix  
Wrap : 7 voix

La majorité absolue étant à 9, il faut faire un deuxième tour qui donne

Pizza : 11 voix  
Burger : 12 voix  
Wrap : 11 voix

Donc Burger est élu dans le premier ensemble.

Dans le second ensemble, le premier tour du scrutin de Bucklin donne

Pizza : 6 voix  
Burger : 8 voix  
Wrap : 1 voix

et Burger est élu dès le premier tour.

Si on réunit les deux ensembles, on a

Pizza - Burger - Wrap : 4 votant·es  
Pizza - Wrap - Burger : 6 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap : 2 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 12 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 6 votant·es  
Wrap - Burger - Pizza : 2 votant·es

Le premier tour du scrutin de Bucklin donne

Pizza : 10 voix  
Burger : 14 voix  
Wrap : 8 voix

Comme il y a 32 votant·es, la majorité absolue est à 17 donc il faut faire un deuxième tour :

Pizza : 18 voix  
Burger : 20 voix  
Wrap : 26 voix

C'est donc Wrap qui est élu sur les deux ensembles pris ensemble alors que Burger était élu dans chaque ensemble. Le scrutin de Bucklin ne vérifie pas la consistance aux rassemblements.

Pour la discussion :



C'est une première tentative d'améliorer le scrutin majoritaire à deux tours en évitant l'élimination des candidat·es entre deux tours mais en utilisant plutôt les classements, enfin les premières places.

## 5. Scrutin de Borda

Le scrutin de Borda n'élit pas nécessairement un vainqueur de Condorcet comme montré par l'exemple de l'atelier.

Par contre, il ne peut pas élire un perdant de Condorcet. La preuve n'est pas simple sans être incompréhensible. Soit  $n$  le nombre de candidat·es et  $p$  le nombre de votants. Il y a donc  $\frac{pn(n-1)}{2}$  points à distribuer au total. Pour gagner, il en faut donc au minimum  $\frac{p(n-1)}{2}$  strictement (qui est la moyenne des points distribués). Quand un·e candidat·e récupère  $q$  points chez un·e votant·e, c'est qu'il y a  $q$  candidat·es derrière lui. Une autre façon de compter les points est donc de regarder le nombre de duels gagnés par le·la candidat·e chez tous·tes les votant·es. Un·e perdant·e de Condorcet gagne au maximum  $\frac{p}{2} - 1$  duels (si  $p$  est pair) ou  $\frac{p-1}{2}$  duels (si  $p$  est impair) avec chaque candidat·e. Au total, iel ne pourra donc récupérer que  $(n-1)(\frac{p}{2} - 1)$  points (si  $p$  est pair) ou  $(n-1)\frac{p-1}{2}$  points (si  $p$  est impair). Or  $(n-1)(\frac{p}{2} - 1) < \frac{p(n-1)}{2}$  et  $(n-1)\frac{p-1}{2} < \frac{p(n-1)}{2}$  donc le·la perdant·e de Condorcet ne peut pas avoir assez de points pour gagner.

Pour la consistance aux rassemblements, c'est direct. Comme les points de deux sous-ensembles s'additionnent sans interférence, un plat qui a plus de points sur chacun des sous-ensembles a plus de points sur la réunion des deux.

La propriété de monotonie est également vérifiée puisque faire remonter un plat dans le classement ne fait qu'augmenter les points de ce plat et descendre les points de quelques autres. Donc le plat déjà élu n'en sera que mieux élu.

Considérons maintenant l'exemple suivant :

Pizza - Burger - Wrap : 5 votant·es

Wrap - Pizza - Burger : 6 votant·es

Pizza a 16 points, Burger 5 points et Wrap 12 points. C'est donc Pizza qui remporte le scrutin de Borda. Si Burger se désiste, on se retrouve avec un duel Pizza-Wrap remporté par Wrap. Le scrutin de Borda ne vérifie donc pas la propriété d'indépendance aux alternatives.

### Pour la discussion :

Ce mode de scrutin est souvent apprécié. Il élit un plat plus consensuel. Il ne peut pas élire un perdant de Condorcet mais un vainqueur de Condorcet peut ne pas être élu (ce que reprochait Condorcet à Borda). Il est sensible aux alternatives. Il imposerait lors d'élections



de faire un classement complet, bien ordonné, de tous-tes les candidat-es, ce qui peut sembler compliqué.

Comme les élèves trouvent souvent qu'un vainqueur de Condorcet devrait être élu mais aiment bien Borda, iels proposent parfois la modification suivante : s'il y a un vainqueur de Condorcet, il est élu ; sinon, on fait un scrutin de Borda. Vous pouvez faire étudier ce mode de scrutin qui élira un vainqueur de Condorcet, n'élira pas un perdant de Condorcet. Mais au prix de la perte de nombreuses autres propriétés, comme tout scrutin à plusieurs tours.

## 6. Scrutin de Nanson

Le scrutin de Nanson ne peut pas mener à l'élection d'un perdant de Condorcet puisqu'on a vu que celui-ci avait moins de points que la moyenne (cf. Borda) et se ferait donc éliminer au premier tour. De même, on peut montrer qu'un vainqueur de Condorcet a plus de points que la moyenne. Comme un vainqueur de Condorcet le reste tour après tour, il ne peut jamais être éliminé et gagne forcément l'élection.

Le scrutin de Nanson ne vérifie pas la propriété de monotonie. Ceci est dû au fait qu'il se déroule en plusieurs tours. Voici un exemple, pas complètement évident à trouver, avec 4 plats et 33 votant-es :

Wrap - Pizza - Burger - Spaghetti : 10 votant-es  
Spaghetti - Burger - Wrap - Pizza : 7 votant-es  
Pizza - Burger - Spaghetti - Wrap : 7 votant-es  
Burger - Pizza - Wrap - Spaghetti : 4 votant-es  
Pizza - Wrap - Spaghetti - Burger : 5 votant-es

Au premier tour, on a les résultats suivants :

Wrap a  $3 \times 10 + 2 \times 5 + 1 \times 11 = 51$  points.  
Pizza a  $3 \times 12 + 2 \times 14 + 1 \times 0 = 64$  points.  
Burger a  $3 \times 4 + 2 \times 14 + 1 \times 10 = 50$  points.  
Spaghetti a  $3 \times 7 + 2 \times 0 + 1 \times 12 = 33$  points.

La moyenne est à 49,5 points donc Spaghetti est éliminé. On a donc pour le deuxième tour les votes :

Wrap - Pizza - Burger : 10 votant-es  
Burger - Wrap - Pizza : 7 votant-es  
Pizza - Burger - Wrap : 7 votant-es  
Burger - Pizza - Wrap : 4 votant-es  
Pizza - Wrap - Burger : 5 votant-es

Au deuxième tour, on a les résultats suivants :

Wrap a  $2 \times 10 + 1 \times 12 = 32$  points.  
Pizza a  $2 \times 12 + 1 \times 14 = 38$  points.  
Burger a  $2 \times 11 + 1 \times 7 = 29$  points.



Comme la moyenne est à 33 points, Burger et Wrap sont éliminés donc Pizza est élue.

Imaginons maintenant que les 4 votant·es Burger - Pizza - Wrap - Spaghetti fassent remonter Pizza dans leur classement et votent Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti. On aurait alors

Wrap - Pizza - Burger - Spaghetti : 10 votant·es

Spaghetti - Burger - Wrap - Pizza : 7 votant·es

Pizza - Burger - Spaghetti - Wrap : 7 votant·es

Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 4 votant·es

Pizza - Wrap - Spaghetti - Burger : 5 votant·es

Cela devrait avantager Pizza, seule à remonter dans les classements, le reste étant inchangé. Au premier tour du scrutin de Nanson, on a maintenant

Wrap a  $3 \times 10 + 2 \times 5 + 1 \times 11 = 51$  points.

Pizza a  $3 \times 16 + 2 \times 10 + 1 \times 0 = 68$  points.

Burger a  $3 \times 0 + 2 \times 18 + 1 \times 10 = 46$  points.

Spaghetti a  $3 \times 7 + 2 \times 0 + 1 \times 12 = 33$  points.

Cette fois, Spaghetti et Burger sont éliminés au premier tour. Et le duel du second tour entre Wrap et Pizza donne Wrap gagnant par 17 à 16.

Le scrutin de Nanson ne vérifie donc pas la propriété de monotonie.

Sur ce même exemple, imaginons que Burger se désiste. Cela ne devrait pas changer le résultat puisqu'il n'était pas élu (pour rappel, c'était Pizza). Nous aurions alors

Wrap - Pizza - Spaghetti : 10 votant·es

Spaghetti - Wrap - Pizza : 7 votant·es

Pizza - Spaghetti - Wrap : 7 votant·es

Pizza - Wrap - Spaghetti : 9 votant·es

Le premier tour donne :

Wrap a  $2 \times 10 + 1 \times 16 = 36$  points.

Pizza a  $2 \times 16 + 1 \times 10 = 42$  points.

Spaghetti a  $2 \times 7 + 1 \times 7 = 21$  points.

Comme la moyenne est à 33 points, seul Spaghetti est éliminé, laissant au second tour un duel qui voit Wrap gagner par 17 à 16. Le désistement de Burger entraîne donc un changement de vainqueur sans que Burger ne soit élu au départ. Le scrutin de Nanson ne vérifie donc pas l'indépendance aux alternatives.

Pour l'incitation à la participation, on peut regarder la situation suivante, avec 4 plats et 19 votant·es :



Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 5 votant·es  
Burger - Wrap - Spaghetti - Pizza : 5 votant·es  
Wrap - Pizza - Spaghetti - Burger : 6 votant·es  
Wrap - Burger - Pizza - Spaghetti : 1 votant·e  
Wrap - Burger - Spaghetti - Pizza : 2 votant·es

Le premier tour donne :

Pizza a  $3 \times 5 + 2 \times 6 + 1 \times 1 = 28$  points.  
Wrap a  $3 \times 9 + 2 \times 5 + 1 \times 5 = 42$  points.  
Spaghetti a  $3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 13 = 13$  points  
Burger a  $3 \times 5 + 2 \times 8 + 1 \times 0 = 31$  points

Avec une moyenne de 28,5, Spaghetti et Pizza sont éliminés au premier tour et on a le duel Burger - Wrap au second tour qui voit Burger gagner 10-9.

Imaginons maintenant que les deux votant·es Wrap - Burger - Spaghetti - Pizza s'abstiennent. Cela enlève 6 points à Wrap, 4 à Burger et 2 à Spaghetti donc

Pizza a 28 points  
Wrap a 36 points  
Burger a 27 points  
Spaghetti a 11 points

La moyenne est maintenant de 25,5 et seul Spaghetti est éliminé. Pour le deuxième tour, on a les votes suivants :

Pizza - Burger - Wrap : 5 votant·es  
Burger - Wrap - Pizza : 5 votant·es  
Wrap - Pizza - Burger : 6 votant·es  
Wrap - Burger - Pizza : 1 votant·e

Le deuxième tour donne donc :

Pizza a  $2 \times 5 + 1 \times 6 = 16$  points.  
Wrap a  $2 \times 7 + 1 \times 5 = 19$  points.  
Burger a  $2 \times 5 + 1 \times 6 = 16$  points.

Avec une moyenne de 17, Burger et Pizza sont éliminés et Wrap remporte le scrutin. L'abstention des deux votant·es Wrap - Burger - Spaghetti - Pizza change le vainqueur de Burger en Wrap, ce qui les arrange. Ainsi le scrutin de Nanson ne vérifie pas la propriété de l'incitation à la participation.

Enfin, considérons les deux ensembles de votant·es suivants :

Ensemble 1



Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 4 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap - Spaghetti : 3 votant·es

Ensemble 2

Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 1 votant·e  
Burger - Pizza - Wrap - Spaghetti : 2 votant·es  
Spaghetti - Burger - Pizza - Wrap : 3 votant·es  
Wrap - Spaghetti - Burger - Pizza : 3 votant·es  
Pizza - Wrap - Spaghetti - Burger : 3 votant·es

Pour l'ensemble 1, le premier tour donne Pizza (18), Burger (17), Wrap (7), Spaghetti (0) et Spaghetti et Wrap sont éliminés. Le duel de second tour donne Pizza vainqueur.

Pour l'ensemble 2, le premier tour donne Pizza (19), Burger (17), Wrap (18), Spaghetti (18). Avec une moyenne de 18, seul Burger est éliminé. Le second tour donne Pizza (18), Wrap (12), Spaghetti (9). La moyenne étant de 13, Pizza gagne le scrutin également dans ce deuxième ensemble.

Si on rassemble tout le monde, on a

Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 5 votant·es  
Burger - Pizza - Wrap - Spaghetti : 5 votant·es  
Spaghetti - Burger - Pizza - Wrap : 3 votant·es  
Wrap - Spaghetti - Burger - Pizza : 3 votant·es  
Pizza - Wrap - Spaghetti - Burger : 3 votant·es

Au premier tour,

Pizza a  $3 \times 8 + 2 \times 5 + 1 \times 3 = 37$  points.  
Wrap a  $3 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 10 = 25$  points.  
Spaghetti a  $3 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 18$  points  
Burger a  $3 \times 5 + 2 \times 8 + 1 \times 3 = 34$  points

La moyenne étant de 28,5, on a un duel Pizza-Burger au deuxième tour qui est gagné par Burger 11-8. Alors que Pizza avait gagné dans les deux sous-ensembles. Le scrutin de Nanson ne vérifie donc pas la propriété de consistance au rassemblement.

Pour la discussion :

Il permet d'élire un vainqueur de Condorcet à tous les coups (contrairement à un Borda simple) mais au prix de la perte de nombreuses autres propriétés. En plus d'imposer un classement complet, comme Borda, le dépouillement non électronique s'avèrerait long.



## 7. Scrutin d'élimination successive par le bas

Ce scrutin n'élira jamais un perdant de Condorcet puisqu'il se termine par un duel, perdu par celui-ci.

Par contre, il ne vérifie aucune des autres propriétés.

Ce scrutin n'élit pas nécessairement un·e vainqueur de Condorcet comme montré par l'exemple minimal suivant :

Pizza - Burger - Wrap : 2 votant·es

Pizza - Wrap - Burger : 2 votant·es

Wrap - Burger - Pizza : 3 votant·es

où Pizza gagne ses deux duels 4-3 mais est éliminé·e au premier tour. Puis Burger gagne. Si Wrap se retire, c'est maintenant Pizza qui gagne donc ce scrutin ne vérifie pas l'indépendance aux alternatives.

Ce scrutin ne vérifie pas la propriété de monotonie comme montré par l'exemple

Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 3 votant·es

Wrap - Burger - Pizza - Spaghetti : 3 votant·es

Burger - Pizza - Spaghetti - Wrap : 4 votant·es

Wrap - Pizza - Burger - Spaghetti : 6 votant·es

où Spaghetti est éliminé au premier tour puis on a

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es

Wrap - Burger - Pizza : 3 votant·es

Burger - Pizza - Wrap : 4 votant·es

Wrap - Pizza - Burger : 6 votant·es

et donc Wrap est éliminé puis Pizza est élu contre Burger par 9-7.

Si les votant·es Wrap - Burger - Pizza - Spaghetti font remonter Pizza d'une position, on se retrouve avec

Pizza - Burger - Wrap - Spaghetti : 3 votant·es

Wrap - Pizza - Burger - Spaghetti : 9 votant·es

Burger - Pizza - Spaghetti - Wrap : 4 votant·es

où Spaghetti est éliminé au premier tour puis on a

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es

Wrap - Pizza - Burger : 9 votant·es

Burger - Pizza - Wrap : 4 votant·es





et donc Burger est éliminé puis Wrap est élu contre Pizza par 9-7. Donc faire remonter Pizza dans quelques classements conduit à sa défaite.

Ce scrutin ne vérifie pas la consistance aux rassemblements comme montré par l'exemple

Sous-ensemble 1 :

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es

Burger - Wrap - Pizza : 1 votant·e

Wrap - Burger - Pizza : 1 votant·e

dans lequel Wrap est éliminé au premier tour et Pizza gagne son duel contre Burger au second tour.

Sous-ensemble 2 :

Pizza - Wrap - Burger : 3 votant·es

Burger - Wrap - Pizza : 2 votant·es

dans lequel Burger est éliminé au premier tour et Pizza gagne son duel contre Wrap au deuxième.

Si on rassemble tout le monde, on a

Pizza - Burger - Wrap : 3 votant·es

Burger - Wrap - Pizza : 3 votant·es

Pizza - Wrap - Burger : 3 votant·es

Wrap - Burger - Pizza : 1 votant·e

dans lequel Pizza est éliminé dès le premier tour. Puis Burger gagne.

Ainsi ce mode de scrutin ne vérifie pas la consistance aux rassemblements.

Ce scrutin ne vérifie pas l'incitation à voter comme montré par l'exemple

Pizza - Burger - Wrap : 4 votant·es

Pizza - Wrap - Burger : 1 votant·e

Burger - Pizza - Wrap : 2 votant·es

Burger - Wrap - Pizza : 4 votant·es

Wrap - Pizza - Burger : 3 votant·es

Wrap - Burger - Pizza : 1 votant·e

dans lequel Wrap se fait éliminer au premier tour (6 dernières places contre 5 pour Pizza et 4 pour Burger) tandis qu'au deuxième tour, Pizza gagne 8-7 contre Burger et est donc élu·e.

Par contre, si les deux votant·es Burger - Pizza - Wrap s'abstiennent, on a

Pizza - Burger - Wrap : 4 votant·es



Pizza - Wrap - Burger : 1 votant·e  
 Burger - Wrap - Pizza : 4 votant·es  
 Wrap - Pizza - Burger : 3 votant·es  
 Wrap - Burger - Pizza : 1 votant·e

dans lequel c'est Pizza qui se fait éliminer au premier tour (5 dernières places contre 4 pour Burger et Wrap) tandis qu'au second tour, Burger l'emporte contre Wrap par 8 à 5. Ainsi Burger est élu à la place de Pizza, or Burger était préféré à Pizza par les votant·es qui se sont abstenu·es.

Ce mode de scrutin est proposé par les élèves dans l'atelier suite à l'élection de Sushis, plat presque unanimement détesté et élu au scrutin majoritaire à un tour. Mais il ne vérifie pas beaucoup de propriétés si ce n'est celle d'éviter l'élection d'un plat très détesté.

### Bilan des propriétés des divers modes de scrutin

Propriétés	Scrutin majoritaire à un tour	Scrutin majoritaire à deux tours	Borda	Élimination successive (par le bas)	Nanson	Bucklin
Vainqueur de Condorcet	Non	Non	Non	Non	Oui	Non
Perdant·e de Condorcet	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
Monotonie	Oui	Non	Oui	Non	Non	Oui
Indépendance aux alternatives	Non	Non	Non	Non	Non	Non
Consistance aux rassemblements	Oui	Non	Oui	Non	Non	Non
Incitation à la participation	Oui	Non	Oui	Non	Non	Non