

# Atelier

## « Comment bien voter ? »

Cet atelier permet aux élèves de découvrir différents **modes de scrutin**, leurs limites et les propriétés mathématiques associées. Chaque élève reçoit une fiche d'opinion qui lui donne un classement entre plusieurs plats. L'objectif est de choisir un plat commun pour tout le groupe. À l'aide de toutes les préférences imposées, les élèves constateront les différents résultats de vote en fonction du mode de scrutin choisi (majoritaire un tour, deux tours, Bucklin ou Borda).

Cet atelier permet de montrer que le mode de scrutin n'est pas anodin et de questionner les modes de scrutin habituellement utilisés.

**Thématique** : théorie de la décision, théorie du choix social, économie

**Nombre de participant·es** : groupe de 12 à 19 élèves

**Niveau scolaire** : lycée

**Durée** : 1 h 15

### Sommaire

<b>Matériel</b>	<b>2</b>
<b>Déroulé de l'atelier</b>	<b>3</b>
1. Introduction (15 min)	3
2. Découverte des modes de scrutin (35 min)	4
a. Scrutin uninominal majoritaire à un tour et scrutin uninominal majoritaire à deux tours [indépendance aux alternatives]	5
b. Bucklin [incitation à la participation]	7
c. Borda [Vainqueur de Condorcet]	9
3. Lien entre mathématiques et modes de scrutin (20 min)	11
4. Conclusion (5 min)	15

Atelier créé par Olivier Druet et Nina Gasking.

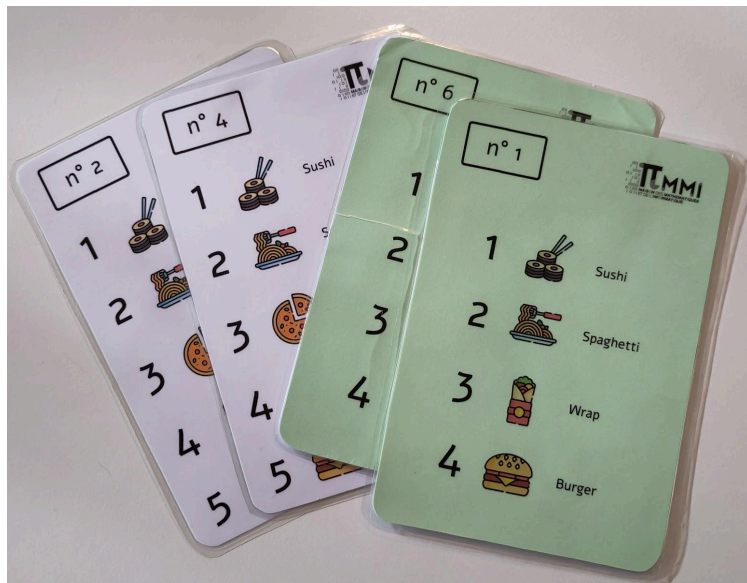
Remerciements à Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland.



# Matériel

## Pour toute l'activité :

- Diaporama<sup>1</sup>.
- Fiches<sup>2</sup> opinions pour 19 personnes. Il y a des fiches qui peuvent être regroupées et données à une seule personne : fiches 1, 2, 3 et 4 ; fiches 7, 8, 9 ; fiches 14 et 15 ; fiches 18 et 19. Cela permet de s'adapter à des groupes allant de 12 à 19 personnes. Les fiches avec 4 plats (pages 11 à 20) sont imprimées sur du papier vert et les fiches avec 5 plats (pages 1 à 10) sur du papier blanc, puis collées pour faire une fiche recto-verso pour chaque élève. Cela permet de voir rapidement si les élèves ont la fiche dans le bon sens.



<sup>1</sup> Fichier .pdf : « Diaporama - Comment bien voter ? »

<sup>2</sup> Fichier .pdf : « Fiches - Comment bien voter ? »



## Déroulé de l'atelier

Le format de cet atelier est différent des ateliers généralement présentés à la MMI. Il s'agit d'une sorte de **conférence avec des temps d'échange**. Il faut être très vigilant·e à laisser suffisamment de place pour des discussions avec les élèves, sinon l'atelier sera inévitablement trop magistral.

Ce déroulé sert de support pour le discours accompagnant les diapositives du diaporama. Pour bien le comprendre, nous vous conseillons de faire les votes au fur et à mesure. De plus, cet atelier ouvre la porte à de nombreuses questions de la part des élèves : même s'il n'est pas attendu d'un·e médiateur·rice d'être expert·e de la question, nous recommandons vivement de connaître d'autres modes de scrutins (avec des exemples de contexte d'utilisation) et propriétés que ceux présentés dans l'atelier.

### 1. Introduction (15 min)

*Diapositives 1 et 2 :*

Introduire la situation : « Ce soir j'invite 19 personnes à manger chez moi. Pour me simplifier la vie, je vais préparer un plat unique pour tout le monde. Je ne sais faire que **4 plats différents** : des sushis, des burgers, des wraps et des spaghettis. Vous allez jouer le rôle de mes invité·es. »

Les élèves vont évidemment avoir des opinions personnelles et préférer certains plats mais il faut expliquer qu'ils vont **jouer le rôle d'un·e invité·e**. Chaque personne reçoit donc une fiche d'opinion qui permet de classer leurs préférences.

Distribuer les fiches aux élèves.

*Diapositive 3 :*

Montrer l'exemple de la fiche n°1 (les élèves doivent tous·tes regarder le côté vert avec 4 plats uniquement) et bien expliquer l'ordre : cette personne préfère les sushis à tous les autres plats, en deuxième position il y a les spaghettis, puis en troisième le wrap et le plat détesté, en quatrième, est le burger.

Rappeler que l'on veut choisir un plat unique pour tout le monde et demander aux élèves comment décider. L'objectif est d'arriver à l'idée qu'il faut **voter**.

*Diapositives 4 à 9 :*

Le vote le plus « simple / naturel » pour les élèves est souvent le vote à main levée où l'on indique son plat préféré. Demander « Qui préfère les sushis ? » (en rappelant que préféré signifie être classé n°1 sur la liste) et compter les réponses. On obtient les résultats suivants :



Sushis	Burger	Wrap	Spaghettis
6	5	4	4

Le plat choisi est donc les **sushis**.

Demander aux élèves s'ils sont content·es du résultat. Evidemment 6 élèves vont être content·es (ceux qui ont classé sushis en n°1) mais les autres votant·es ont classé sushis en position 4 (c'est-à-dire que c'est le plat le plus détesté). En effet, **le scrutin uninominal majoritaire à un tour peut élire des candidat·es clivant·es**.

*Diapositives 10 à 13 :*

Amener les élèves à l'idée que l'on fait généralement un **deuxième tour**. Rappeler le fonctionnement<sup>3</sup> : les deux candidat·es avec le plus de voix passent au deuxième tour, ici « Sushis » et « Burger ». Il faut donc que les élèves imaginent que les deux autres candidat·es (wrap et spaghettis) sont barrés de leur liste pour voter.

Faire le deuxième tour :

« Qui préfère les sushis aux burgers ? » : ce sont toujours les mêmes 6 personnes (puisque les sushis sont classés en 4 sur les 13 autres fiches).

« Qui préfère les burgers aux sushis ? » : les élèves peuvent lever la main mais on peut aussi déduire la réponse puisqu'il y a 19 votant·es.

On obtient les résultats suivants :

Sushis	Burger
6	13

Le plat choisi est donc les **burgers**.

## 2. Découverte des modes de scrutin (35 min)

*Diapositive 14 :*

Expliquer que l'on vient de découvrir deux modes de scrutin différents. Expliquer brièvement ce qu'est un **mode de scrutin** : un processus qui permet de trouver à partir de préférences individuelles (les avis de chaque personne) une préférence collective et donc un choix (par exemple, le burger élu précédemment).

<sup>3</sup> On notera que le deuxième tour n'a lieu que si aucun·e candidat·e n'a la majorité absolue, sinon iel est élu·e au premier tour.



a. Scrutin uninominal majoritaire à un tour et scrutin uninominal majoritaire à deux tours [indépendance aux alternatives]

*Diapositives 15 à 21 :*

Demander aux élèves s'ils savent comment s'appellent les deux modes de scrutin que l'on vient de voir : le scrutin uninominal majoritaire à un tour et le scrutin uninominal majoritaire à deux tours. Puis s'ils connaissent des exemples de situations où ils sont utilisés.

**Le scrutin uninominal majoritaire à un tour** : le vote à main levée.

**Le scrutin uninominal majoritaire à deux tours** : les élections présidentielles en France et les élections de délégué·es de classe.

*Remarque* : On peut expliquer le nom de ces scrutins :

- Uninominal : une seule personne est élue ;
- Majoritaire : il faut avoir la majorité (absolue pour un tour et relative pour deux tours – pour les élèves, à ce stade, on peut simplement dire qu'on a la majorité si on a le plus de voix) pour être élu·e ;
- $n$  tours : le nombre de tours.

*Diapositives 22 et 23 :*

Introduire un nouveau plat : « J'ai oublié de vous dire mais je sais également faire la **pizza** : je la rajoute en option. » et expliquer qu'il faut donc retourner sa feuille côté blanc pour voir le nouvel ordre avec la pizza. Prendre le temps de montrer que l'ajout de la pizza ne vient pas changer l'ordre précédent. Par exemple, le n°1 préfère toujours les spaghettis aux wraps. La pizza est simplement venue s'insérer dans la liste.

*Diapositives 24 et 25 :*

Avec un nouveau plat, on veut évidemment refaire le vote. Pour motiver les élèves à refaire le vote, on peut comparer la pizza au burger (c'est-à-dire le dernier plat élu). On demande « Qui préfère la pizza au burger ? » et les élèves constatent que 11 personnes (sur 19) préfèrent la pizza. Faire le vote semble donc très utile puisqu'on imagine à ce stade que la pizza va être choisie.

*Diapositives 26 à 36 :*

On refait donc les votes avec les élèves (qui votent systématiquement à main levée à partir de leurs fiches).

Pour le scrutin uninominal majoritaire à un tour, on obtient :

Sushis	Burger	Wrap	Spaghettis	Pizza
6	3	4	3	3



Les **sushis** sont donc toujours élus avec ce scrutin.

On passe au scrutin uninominal majoritaire à deux tours (le premier tour est donc celui que l'on vient de faire). Les sushis et le wrap passent au deuxième tour et on obtient :

Sushis	Wrap
6	13

Le **wrap** est donc choisi.

Laisser un petit temps aux élèves pour voir si certain·es réagissent et si personne ne réagit il faut les pousser à réagir : « Vous ne trouvez pas ça étrange ? Les burgers étaient choisis, on a ajouté la pizza et finalement on va manger des wraps. »

On peut utiliser la métaphore suivante pour convaincre les élèves que c'est étrange :  
« Vous allez au restaurant et le serveur vous propose en dessert une mousse au chocolat ou une salade de fruits. Après un moment de réflexion, vous choisissez la mousse au chocolat. Le serveur repart en cuisine et revient 2 minutes plus tard en disant : "j'avais oublié, il y a aussi une glace en dessert". Et là vous répondez "Dans ce cas-là je vais prendre une salade de fruits !". »

*Diapositives 37 à 46 :*

Prendre le temps de dérouler ce qu'il vient de se passer pour que tous·tes les élèves comprennent (sous forme d'échange).

Au départ, il y avait 4 plats. Avec notre premier vote (à un tour), vous avez choisi les sushis puis avec le deuxième vote (à deux tours), vous avez choisi les burgers.

On a ajouté la pizza. Avec le vote à un tour, on imagine deux issues possibles : les sushis sont toujours choisis ou la pizza sera préférée. On a fait le vote et ce sont toujours les sushis. Avec le vote à deux tours, on imagine également deux issues possibles : le burger est toujours choisi ou la pizza sera préférée. On a d'ailleurs remarqué que la pizza est préférée au burger, on imagine même que la pizza va gagner. Mais après le vote, les wraps sont choisis.

Ce phénomène porte un nom, on dit que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne satisfait pas la propriété de **l'indépendance aux alternatives**. On peut faire remarquer que le scrutin uninominal majoritaire à un tour ne vérifie pas non plus cette propriété, même si l'exemple de l'atelier n'est pas un contre-exemple.

*Diapositive 47 :*

Rappeler que l'on vient de voir des modes de scrutin (avec la définition). Expliquer qu'il en existe énormément. Demander aux élèves si iels imaginent d'autres façons de voter. Les élèves ont souvent des idées et il faut être capable de reconnaître des scrutins existants.



## b. Bucklin [incitation à la participation]

Un défaut des deux scrutins déjà vu est de ne pas tenir compte de toutes les préférences des votant-es. Leur premier choix a une importance énorme : un plat qui arrive tout le temps en 2ème ne sera jamais choisi alors que cela pourrait être un choix raisonnable.

*Diapositive 48 :*

On va découvrir le **scrutin de Bucklin** qui utilise les autres choix.

Voici comment il fonctionne :

On regarde les premiers choix (équivalent au vote uninominal majoritaire à un tour). Si un-e candidat-e a une majorité absolue (plus de la moitié des voix), il ou elle est élue. Sinon, on ajoute les seconds choix au premier. Si un-e candidat-e obtient la majorité des voix, le ou la vainqueur est le ou la candidat-e ayant le plus grand nombre de voix accumulées. Les choix inférieurs sont ajoutés si nécessaire.

*Diapositives 49 à 64 :*

Procéder au vote avec les élèves. On obtient :

	Sushis	Burger	Wrap	Spaghettis	Pizza
Choix 1	6	3	4	3	3
Choix 2	0	7	2	6	4
Total	6	10	6	9	7

La **majorité absolue** pour 19 votant-es est de 10 votante-s (puisque la moitié de 19 est 9,5). Aucun plat n'a cette majorité absolue avec uniquement le choix 1, on ajoute donc les choix 2 et on constate que les burgers obtiennent la majorité absolue. Les **burgers** sont élus.

Rappeler qu'avec le scrutin uninominal majoritaire à 2 tours, les wraps étaient élus.

*Diapositives 65 à 93 :*

Demander qui est le votant-e n°11 et expliquer que cette personne n'est pas venue voter (on peut prétexter n'importe quelle excuse). Le fait de ne pas aller voter s'appelle l'**abstention** : on dit que n°11 s'abstient. Il y a généralement une confusion avec le vote blanc.

Il faut donc refaire le vote puisqu'on imagine que l'issue peut être changée. Pour gagner du temps, on peut utiliser les résultats précédents. Il suffit d'enlever les choix de n°11. On enlève une voix à son premier choix : la pizza. Puis on enlève une voix à son deuxième choix : le burger.



On obtient :

	Sushis	Burger	Wrap	Spaghettis	Pizza
Choix 1	6	3	4	3	2
Choix 2	0	6	2	6	4
Total	6	9	6	9	6

La majorité absolue pour 18 votant·es est toujours de 10 votant·e·s : avoir plus de la moitié des voix signifie ici avoir plus de 9 voix c'est-à-dire 10. Aucun plat n'a la majorité absolue, il faut donc ajouter les choix 3. On obtient :

	Sushis	Burger	Wrap	Spaghettis	Pizza
Choix 1	6	3	4	3	2
Choix 2	0	6	2	6	4
Choix 3	0	1	3	4	10
Total	6	10	9	13	16

Plusieurs plats ont la majorité absolue, on prend celui qui a le plus de voix : la **pizza** est élue.

À ce stade, rien d'étonnant : l'issue du vote peut changer s'il y a une personne en moins. Demander à n°11 ce qu'il ou elle en pense. Normalement l'élève explique être très content·e de l'issue du vote. Utiliser les diapositives avec les fiches de n°11 pour l'expliquer.

Lorsque n°11 a voté, le burger a été choisi avec le scrutin de Bucklin. C'est le deuxième choix de n°11. Puis lorsque n°11 s'est abstenu·e, la pizza a été choisie, son premier choix. Le ou la votant·e n°11 a donc tout intérêt à ne pas voter.

On dit que le scrutin de Bucklin **incite à l'abstention**. Il en est de même pour le scrutin uninominal majoritaire à deux tours.

**Attention** : il est impératif de prendre le temps d'expliquer ce que cela signifie réellement. Cela ne veut en aucun cas dire qu'il est toujours intéressant de ne pas aller voter si ces scrutins sont utilisés. Cela veut dire qu'il existe des situations où un·e votant·e a un intérêt à ne pas voter. On remarque que pour être capable de faire cela à l'échelle individuelle, il faut connaître l'intégralité des opinions et être certain·e que tout le monde va voter et que personne ne va changer d'avis. De plus, même avec toutes ces informations (ce qui est déjà irréaliste), il n'y a aucune assurance que dans cette situation particulière le fait de ne pas voter vous apporte une issue plus favorable (puisque cela dépend des préférences de tout le monde).





À partir d'ici n°11 est à nouveau un·e votant·e.

*Remarque sur le scrutin de Bucklin* : Ce scrutin a été utilisé au 20ème siècle dans plusieurs grandes villes américaines avant d'être abandonné.

On peut faire un **bilan intermédiaire** des plats élus en fonction des scrutins :

- Scrutin uninominal majoritaire à un tour : sushis.
- Scrutin uninominal majoritaire à deux tours : wraps.
- Scrutin de Bucklin : burgers.

### c. Borda [Vainqueur de Condorcet]

*Diapositives 94 à 100 :*

Le scrutin de Bucklin a l'avantage de ne pas prendre uniquement en compte le choix n°1 mais s'arrête souvent au choix n°2, parfois n°3. Il est naturel de se demander s'il existe un mode de scrutin qui prend en compte toutes les préférences des votant·es. La réponse est oui et pour la suite on va découvrir le mode de **scrutin de Borda**.

[Jean- Charles de Borda](#) propose ce scrutin à la fin du 18ème siècle. Il consiste à attribuer des points aux plats en fonction de leur place : 0 point pour un classement en dernière position, 1 point pour un classement en avant-dernière, etc. Ici, on a donc 4 points pour une première place, 3 points pour une deuxième, 2 points pour une troisième, 1 point pour une quatrième et 0 pour une cinquième place. Ces points correspondent aux **cœurs** présents sur les fiches des élèves.

Cette fois-ci le vote est assez long et fastidieux, nous recommandons donc de simplement expliquer les résultats :

- *Diapositive 95* : Ce tableau montre toutes les préférences des élèves. Par exemple, 5 élèves ont spaghettis en choix n°3.
- *Diapositive 96* : On explique que compter les cœurs (et donc les points) revient simplement à faire des multiplications par le nombre de points pour chaque choix.
- *Diapositive 97* : On montre le résultat des calculs.
- *Diapositive 98* : On fait la somme de chaque colonne pour connaître le nombre de points total par plat.
- *Diapositives 99 et 100* : Le ou la gagnant·e du vote est le plat avec le plus de points, ici le maximum de points est 46. C'est donc la **pizza** qui est élue avec ce scrutin.

*Remarque* : ce mode de scrutin peut faire penser à l'élection du [Ballon d'or masculin](#). Les votant·es sont 208 sélectionneurs des pays membres de la FIFA, des 208 capitaines des sélections ainsi que d'un panel de 208 journalistes représentant les pays qui composent la FIFA. Ces membres du jury nomment trois joueurs (parmi une liste de vingt-trois prédéfinie) par ordre décroissant ; le premier reçoit 5 points, le deuxième 3 points et le troisième 1 point. Le trophée est attribué au joueur ayant recueilli le plus de points.



### Diapositives 101 et 102 :

On prend le temps de faire un bilan des différents résultats en fonction des modes de scrutin :

- Scrutin uninominal majoritaire à un tour : sushis ;
- Scrutin uninominal majoritaire à deux tours : wraps ;
- Scrutin de Bucklin : burgers ;
- Scrutin de Borda : pizzas.

On voit déjà l'**importance** et l'**influence** du mode de scrutin sur le vote. Sur nos 5 plats, 4 ont été élus avec nos modes de scrutin. Faire remarquer que pour l'instant les spaghettis n'ont jamais été élus. On va regarder ce choix de plus près.

### Diapositives 103 et 113 :

On propose de se poser la question suivante : « À la fin de chaque vote, que se serait-il passé si je vous avais demandé "Est-ce que vous préférez les spaghettis ?" ? ».

À nouveau, on fait voter les élèves (il est possible que les élèves en aient un peu marre, on peut leur dire que c'est la dernière fois qu'ils vont voter) :

- Les sushis ont été élus avec le scrutin uninominal majoritaire à un tour. Combien de personnes préfèrent les spaghettis aux sushis ? Il y a 13 élèves donc le groupe préfère les spaghettis.
- Les burgers ont été élus avec le scrutin de Bucklin. Combien de personnes préfèrent les spaghettis aux burgers ? Il y a 10 élèves donc le groupe préfère les spaghettis.
- Les wraps ont été élus avec le scrutin uninominal majoritaire à deux tours. Combien de personnes préfèrent les spaghettis aux wraps ? Il y a 12 élèves donc le groupe préfère les spaghettis.
- Les pizzas ont été élus avec le scrutin de Borda. Combien de personnes préfèrent les spaghettis aux pizzas ? Il y a 10 élèves donc le groupe préfère les spaghettis.

On explique que les votes que l'on vient de faire sont des **duels** (on oppose deux candidat·es). Ici les spaghettis ont gagné tous leurs duels. On fait remarquer qu'à chaque duel les spaghettis ont obtenu la majorité absolue (qui est toujours de 10 avec 19 personnes). Insister sur le fait que cela veut dire qu'à l'issue de chaque vote si on avait demandé « Est-ce que vous préférez les spaghettis au plat que vous venez d'élire ? », la réponse aurait systématiquement été « Oui ! ». On veut montrer aux élèves que cette situation est contre-intuitive. S'ils ne sont pas convaincu·es, on peut prendre l'exemple d'un championnat de sport où toutes les équipes rencontrent toutes les autres. Ne pas élire le vainqueur de Condorcet reviendrait à ne pas déclarer championne l'équipe qui a gagné tous ses matchs.

Lorsqu'un·e candidat·e gagne tous ses duels, on l'appelle le [vainqueur de Condorcet](#). Il existe des modes de scrutin qui suivent la [Méthode de Condorcet](#) qui vont élire le vainqueur de Condorcet s'il existe. Ici, les spaghettis auraient gagné l'élection.

*Remarque* : il n'existe pas forcément de vainqueur de Condorcet.



### 3. Lien entre mathématiques et modes de scrutin (20 min)

*Diapositives 114 et 115 :*

On rappelle que l'on a découvert **différents modes de scrutin** : il s'agit de méthodes qui permettent de trouver une préférence globale à partir de préférences individuelles. Demander aux élèves s'ils voient le **lien** entre ce que l'on vient de faire et les mathématiques. Généralement, les élèves expliquent qu'il y avait des calculs. Prendre le temps d'expliquer que les modes de scrutin sont des **objets mathématiques** qui sont étudiés. En fait, les modes de scrutin sont des **fonctions** qui prennent en entrée les préférences de chacun·e et donnent en sortie une préférence globale. Ce sont évidemment des fonctions plus compliquées que les fonctions auxquelles les élèves sont habitué·es : on peut expliquer que s'ils font des études scientifiques plus tard, ils verront que les fonctions peuvent prendre des choses différentes en entrée.

Mais alors que font les mathématicien·nes ? Pour simplifier, on explique qu'ils peuvent proposer des **nouveaux modes de scrutin** et **étudier les propriétés** des modes de scrutin. Au cours de l'atelier, de nombreuses propriétés et modes de scrutin ont été vus : on va les reprendre.

*Diapositives 116 et 121 :*

La première propriété rencontrée était « **L'indépendance aux alternatives** ». On peut demander si un·e élève se souvient de cette propriété. Dans tous les cas, on rappelle que l'on a vu cette propriété avec le scrutin uninominal majoritaire à deux tours : au départ il y avait 4 plats et le gagnant était le burger, puis on a ajouté la pizza et le gagnant était le wrap.

La propriété de l'indépendance aux alternatives se formule ainsi : « **L'apparition d'un nouveau plat ne change pas le résultat sauf s'il est élu.** ». Dans notre exemple, cette propriété n'était donc pas respectée. On prend le temps d'expliquer qu'il suffit d'un **contre-exemple** (c'est-à-dire une situation avec un ensemble de votant·es et leur préférence) pour que le mode de scrutin ne respecte pas la propriété.

On a donc déjà vu que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne respecte pas cette propriété et on pourrait en fait trouver des contre-exemples pour tous les autres scrutins rencontrés.

*Diapositives 122 et 126 :*

La deuxième propriété rencontrée était « **L'incitation à la participation** ». De même, les élèves se souviennent (ou non) qu'il s'agit de la situation où, avec le scrutin de Bucklin, lorsque le ou la votant·e n°11 votait le plat choisi était le burger (n°2 sur sa liste) et lorsqu'il ou elle ne vote pas c'était alors la pizza qui était élue (n°1 sur sa liste).

La propriété de l'incitation à la participation se formule ainsi : « **Une personne a toujours intérêt à participer au vote plutôt que de ne pas le faire.** » Encore une fois, cette



propriété n'était pas respectée dans notre exemple. On pourrait trouver un autre contre-exemple pour expliquer que cette propriété n'est pas respectée par le scrutin uninominal majoritaire à deux tours.

À l'inverse, elle est respectée par le scrutin majoritaire à un tour et par le scrutin de Borda. Dans ce cas, il faut faire une **preuve** pour justifier que cette propriété est vraie quelque soit les votant·es et leur préférences. Intuitivement, pour le scrutin uninominal majoritaire à un tour, il est clair que si une personne ne participe pas au vote, elle va juste enlever une voix à son ou sa candidat·e préféré·e. De même avec Borda, puisque tous les choix sont pris en compte, on voit que si l'on ne vote pas on ne fait qu'enlever des points à nos différents choix.

*Diapositives 127 et 130 :*

La troisième propriété rencontrée était « **le vainqueur de Condorcet** ». Il s'agit des spaghettis. Formellement, la propriété du vainqueur de Condorcet dit « **Un plat qui gagne tous ses duels est élu.** »

Puisqu'à chaque vote, les spaghettis n'ont pas gagné alors qu'ils gagnent tous leurs duels, notre situation est un contre exemple pour chacun des scrutins.

*Diapositives 131 et 134 :*

Expliquer aux élèves qu'il existe également un « **perdant de Condorcet** ». Les élèves imaginent (même sans savoir ce qu'est un perdant de Condorcet) qu'il s'agit des sushis. Formellement, la propriété du perdant de Condorcet dit « **Un plat qui perd tous ses duels ne peut pas être élu.** »

Les sushis perdent tous leurs duels et pourtant ils ont été élus avec le scrutin uninominal majoritaire à un tour : la propriété n'est donc pas respectée pour ce scrutin.

On peut facilement se convaincre qu'elle est respectée par le scrutin uninominal à deux tours : s'il y a un perdant de Condorcet au deuxième tour, puisqu'il perd tous ses duels, en particulier il perd le deuxième tour.

Pour le scrutin de Bucklin, cette propriété n'est pas respectée et pour le scrutin de Borda elle est respectée (mais c'est plus difficile à démontrer).

*Diapositives 135 et 148 :*

Il existe de nombreuses autres propriétés dont la **propriété de la monotonie**. Cette propriété étant très intéressante, on va prendre le temps de la comprendre. La propriété est la suivante : « **Un plat qui est élu ne sera pas battu s'il remonte dans le classement d'une personne.** »

Pour mieux comprendre cette propriété, on présente un exemple : après les plats, il y a les desserts ! Nous avons 3 options : la salade de fruits, le gâteau au chocolat ou un donut. Nous imaginons que cette fois-ci, il y a 17 personnes qui votent.



5 personnes ont l'ordre de préférence suivant :

1. Salade de fruits
2. Gâteau au chocolat
3. Donut

6 personnes ont l'ordre de préférence suivant :

1. Gâteau au chocolat
2. Donut
3. Salade de fruits

6 personnes ont l'ordre de préférence suivant :

1. Donut
2. Salade de fruits
3. Gâteau au chocolat

On va procéder au vote avec le scrutin uninominal majoritaire à deux tours. Au premier tour, 5 personnes votent pour la salade de fruits, 6 pour le gâteau au chocolat et 6 pour le donut. Après ce tour, il reste donc le gâteau au chocolat et le donut. On procède au deuxième tour, c'est-à-dire qu'on enlève la salade de fruits des préférences, et on constate qu'il y a 11 voix pour le gâteau au chocolat et 6 pour le donut. C'est donc **le gâteau au chocolat qui est élu**.

Maintenant, imaginons que **2 personnes changent d'avis** sur leur préférences. Sur les 6 personnes qui ont l'ordre 1. Donut 2. Salade de fruits 3. Gâteau au chocolat, 4 personnes gardent le même ordre et 2 changent pour l'ordre suivant :

1. Gâteau au chocolat
2. Donut
3. Salade de fruits

Le gâteau au chocolat est simplement remonté dans le classement de ces deux personnes. Ce nouvel ordre est identique au deuxième présenté, il y a donc au total 8 personnes avec les mêmes préférences.

On procède à nouveau au vote. À l'issue du premier tour il reste la gâteau au chocolat (8 voix) et la salade de fruits (5 voix). On élimine donc le donut (qui n'a que 4 voix) et au deuxième tour le gâteau au chocolat obtient toujours 8 voix alors que la salade de fruits en obtient 9. C'est donc **la salade de fruits qui est choisie**.

On résume ce qu'il vient de se passer : **le gâteau au chocolat était élu puis 2 personnes se sont mises à aimer encore plus le gâteau au chocolat entraînant l'élection de la salade de fruits**.

On vient de voir un contre-exemple qui justifie que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne respecte pas la propriété de monotonie. En revanche, tous les autres scrutins que nous avons vu respectent la propriété.



*Diapositives 149 et 150 :*

Expliquer que l'on pourrait continuer à énoncer des propriétés et chercher quels scrutins les respectent. Faire remarquer qu'on voit qu'il y a énormément de croix rouges dans notre tableau. Une question que les mathématicien·nes se posent dans une telle situation : **peut-on trouver un mode de scrutin qui n'a que des tics verts ?**

Cette question est en fait beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît : il faut bien évidemment définir très formellement ce qu'est un mode de scrutin, décider quelles propriétés sont étudiées, etc. Il existe de nombreux résultats portants sur ces questions et un **théorème** est particulièrement connu : [le théorème d'Arrow](#). Celui-ci indique qu'il **n'existe pas de mode de scrutin** (ici, le mode de scrutin est une fonction qui prend des classements en entrée et donne un classement en sortie) **qui respecte à la fois la propriété de l'incitation à la participation et la propriété de monotonie**.

Bien noter que ce théorème n'est pas vrai pour tous les modes de scrutin. Nous évitons le formalisme de la définition des modes de scrutin pour ce théorème qui est lourd et n'est pas compréhensible par le public visé. L'objectif ici est de faire comprendre à la fois qu'il y a un travail mathématique sur ces questions et qu'à partir du moment où on a un résultat d'impossibilité (comme ce théorème) il convient d'essayer « d'en sortir ».

On peut faire comprendre aux élèves qu'ici nous voyons une « limite » des mathématiques : les modes de scrutin peuvent être étudiés mathématiquement, nous pouvons trouver des propriétés et savoir par quels scrutins elles sont respectées mais à partir du moment où il n'y a pas de « scrutin parfait » il faut plutôt se demander **quelles propriétés nous semblent importantes**. On peut demander aux élèves si certaines propriétés leur semblent plus importantes que d'autres : on constate souvent qu'il y a un désaccord entre les élèves. Décider si une propriété est plus importante qu'une autre est une question qui ne relève pas des mathématiques. Il s'agit d'un choix collectif : savoir ce que nous attendons d'un mode de scrutin en tant que groupe. On peut faire remarquer qu'en fonction des situations, on peut utiliser des scrutins différents. Par exemple, pour choisir un repas, on va peut-être préférer élire un plat détesté par le moins de gens possibles.

*Diapositives 151 et 154 :*

Il existe des modes de scrutin qui ne rentrent pas dans le cadre du théorème d'Arrow. Par exemple, le **vote par approbation**. Au lieu de classer les candidat·es, on donne 1 point à tous·tes les candidat·es que l'on aime et 0 point à celles et ceux que l'on n'aime pas. On peut montrer l'exemple avec le ou la votant·e n°12 qui pourrait décider qu'il ou elle aime bien ses trois premiers choix (et leur donne donc 1 point à chacun) mais n'aime pas ses deux derniers choix (ils reçoivent 0 point). On fait ensuite le cumul total des voix et le ou la candidat·es qui en reçoit le plus est élu.

Si l'on étudie ce mode de scrutin, on peut voir qu'il **respecte les propriétés de l'indépendance aux alternatives, de l'incitation à la participation et de la monotonie** mais qu'il ne respecte pas les propriétés du vainqueur de Condorcet ni du perdant de Condorcet. En particulier, on note bien qu'il sort du cadre du théorème.



Ce mode de scrutin a l'avantage d'être simple à expliquer et à comprendre pour les votant-es et il est simple à mettre en place : il suffit de mettre les bulletins des candidats que l'on aime dans notre enveloppe.

#### 4. Conclusion (5 min)

*Diapositive 155 :*

Pour conclure, on rappelle que l'on a découvert différents modes de scrutin et des propriétés qui peuvent ou non être respectées par ces modes de scrutin. Il y a tout un travail mathématique pour définir et étudier toutes ces questions. Pour finir sur une petite touche d'humour, on peut demander aux élèves : pour choisir ce que l'on mange ce soir, il suffit de choisir un mode de scrutin, mais **comment fait-on pour choisir notre mode de scrutin ?** On vote ? Mais selon quel mode de scrutin ?