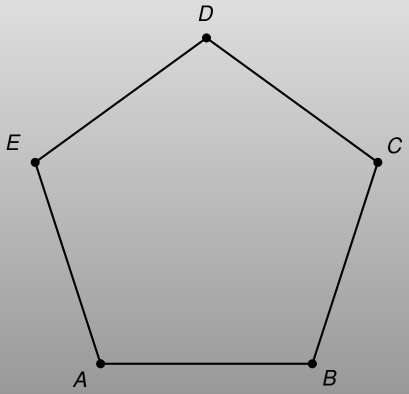
Le pentagone à la règle et au compas

MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

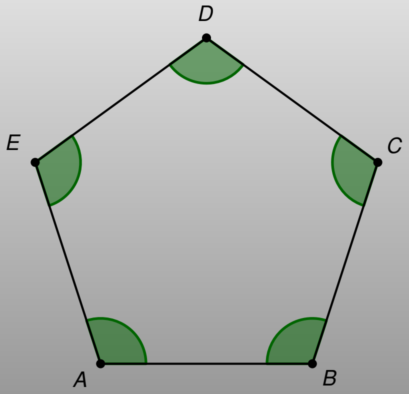
Niveau : première
mots-clefs : Pythagore, Thalès, racines de polynôme du second degré, géométrie du triangle.

Le pentagone régulier



Un pentagone régulier est un polygone à 5 côtés dont tous les côtés sont égaux et tous les angles sont égaux.

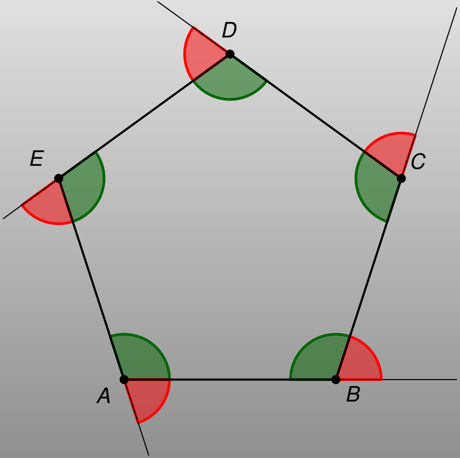
Le pentagone régulier



Un pentagone régulier est un polygone à 5 côtés dont tous les côtés sont égaux et tous les angles sont égaux.

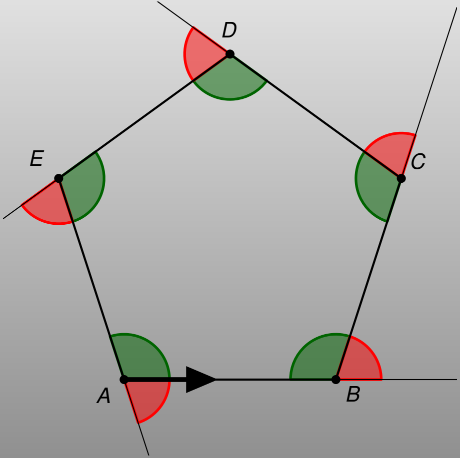
Si tous les angles verts sont égaux, combien vaut cet angle ?

Les angles d'un pentagone régulier



Si tous les angles verts sont égaux, tous les angles rouges le sont également.

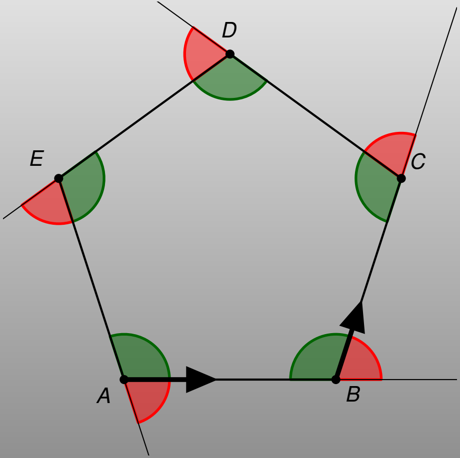
Les angles d'un pentagone régulier



Si tous les angles verts sont égaux, tous les angles rouges le sont également.

Je vais partir du point A dans la direction de B (à l'horizontale ici).

Les angles d’un pentagone régulier

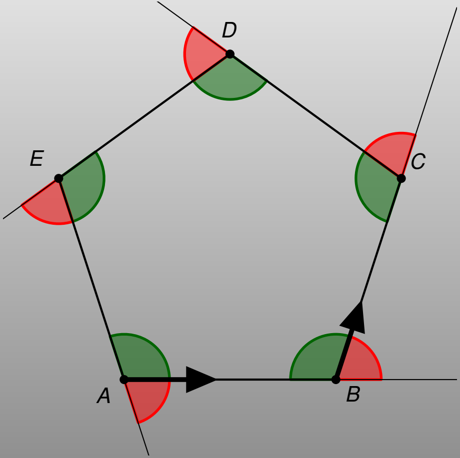


Si tous les angles verts sont égaux, tous les angles rouges le sont également.

Je vais partir du point A dans la direction de B (à l’horizontale ici).

Arrivé au point B, je vais tourner vers la gauche selon l’angle rouge pour aller dans la direction du point C.

Les angles d'un pentagone régulier



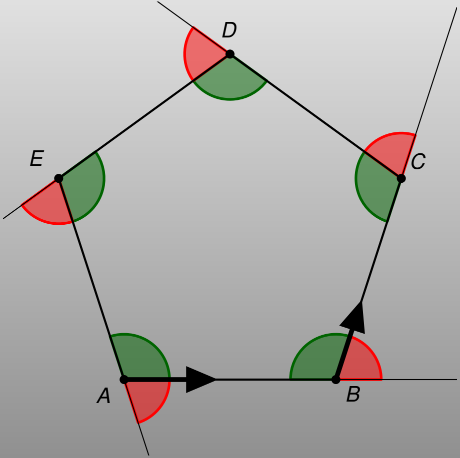
Si tous les angles verts sont égaux, tous les angles rouges le sont également.

Je vais partir du point A dans la direction de B (à l'horizontale ici).

Arrivé au point B, je vais tourner vers la gauche selon l'angle rouge pour aller dans la direction du point C.

Je continue ainsi en tournant à chaque fois d'un angle rouge sur ma gauche jusqu'à revenir au point A et me remettre dans la direction initiale (horizontale).

Les angles d'un pentagone régulier



Si tous les angles verts sont égaux, tous les angles rouges le sont également.

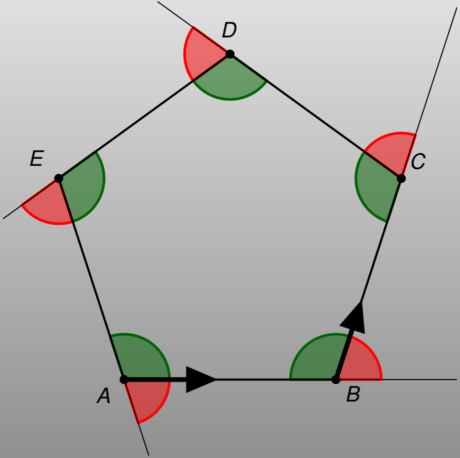
Je vais partir du point A dans la direction de B (à l'horizontale ici).

Arrivé au point B, je vais tourner vers la gauche selon l'angle rouge pour aller dans la direction du point C.

Je continue ainsi en tournant à chaque fois d'un angle rouge sur ma gauche jusqu'à revenir au point A et me remettre dans la direction initiale (horizontale).

J'ai ainsi fait un tour complet (360 degrés) en tournant 5 fois à gauche du même angle (le rouge). Celui-ci vaut donc $\frac{360}{5} = 72$ degrés.

Les angles d'un pentagone régulier



Si tous les angles verts sont égaux, tous les angles rouges le sont également.

Je vais partir du point A dans la direction de B (à l'horizontale ici).

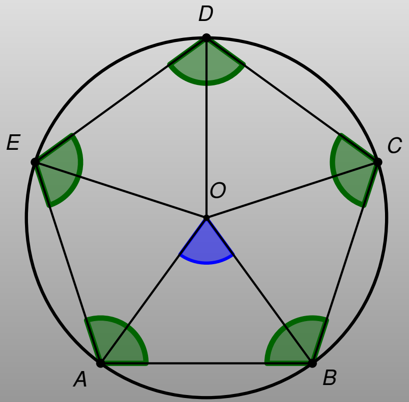
Arrivé au point B, je vais tourner vers la gauche selon l'angle rouge pour aller dans la direction du point C.

Je continue ainsi en tournant à chaque fois d'un angle rouge sur ma gauche jusqu'à revenir au point A et me remettre dans la direction initiale (horizontale).

J'ai ainsi fait un tour complet (360 degrés) en tournant 5 fois à gauche du même angle (le rouge). Celui-ci vaut donc $\frac{360}{5} = 72$ degrés.

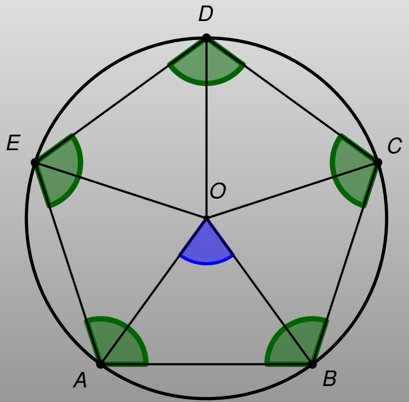
L'angle vert (un angle plat moins l'angle rouge) vaut donc $180 - 72 = 108$ degrés.

Les angles d'un pentagone régulier (bis)



Nous pourrions aussi tout simplement dire qu'un polygone régulier est inscrit dans un cercle (pourquoi ?).

Les angles d’un pentagone régulier (bis)



Nous pourrions aussi tout simplement dire qu’un polygone régulier est inscrit dans un cercle (pourquoi ?).

Par symétrie, tous les angles au centre du cercle sont égaux (angle bleu). Et ils sont égaux à $\frac{360}{5} = 72$ degrés.

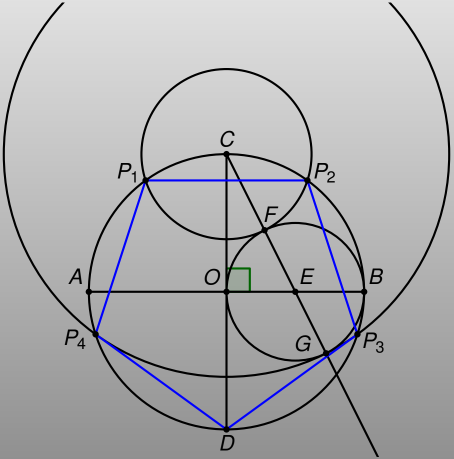
Le triangle OAB étant isocèle, les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ sont égaux (à un demi-angle vert par symétrie).

La somme des angles d’un triangle étant de 180 degrés, l’angle vert vaut 108 degrés.

Une construction à la règle et au compas

Pour voir la construction en vidéo, c’est par ici.

Une construction à la règle et au compas



Nous avons donc :

- Un cercle de centre O de diamètre [AB].
- Un deuxième diamètre, [CD], perpendiculaire au premier.
- E est le milieu de [OB].
- F et G sont les intersections de la droite (CE) avec le cercle de centre E et de rayon [EB].
- P_1 et P_2 sont les intersections du cercle initial avec le cercle de centre C et de rayon [CF].
- P_3 et P_4 sont les intersections du cercle initial avec le cercle de centre C et de rayon [CG].

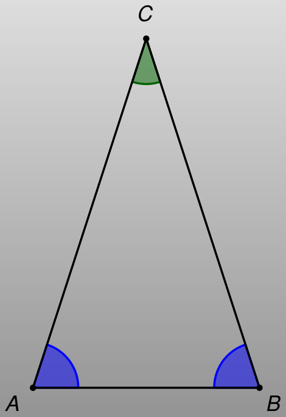
Nous voulons montrer que $P_1P_2P_3DP_4$ est un pentagone régulier.

Une construction à la règle et au compas

La construction présentée est assez rapide. Euclide en avait déjà proposé une, il y a plus de 2000 ans, dans le livre II des Eléments (proposition 11). Celle-ci reposait sur la construction du triangle d'or, un triangle isocèle avec deux angles de 72 degrés et un angle de 36 degrés. Celui-ci est vu comme harmonieux car son angle à la base est double de son angle au sommet. Même si Euclide ne le nomme pas ainsi, ce triangle d'or fait intervenir le nombre d'or.

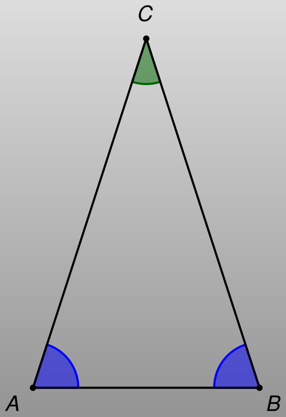
Nous allons donc commencer par étudier ce triangle, et en particulier les rapports entre les longueurs de ses côtés pour pouvoir justifier ensuite que notre pentagone est bien un pentagone régulier.

Le triangle d'or



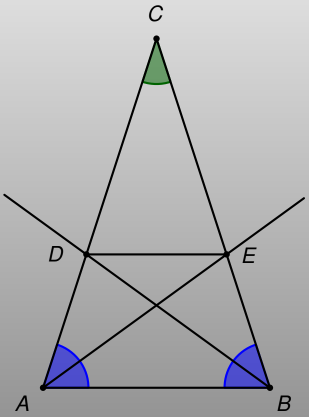
Partons d'un triangle d'or ABC avec les angles à la base (bleus) égaux à 72 degrés et l'angle au sommet (vert) de 36 degrés.

Le triangle d'or



Partons d'un triangle d'or ABC avec les angles à la base (bleus) égaux à 72 degrés et l'angle au sommet (vert) de 36 degrés.
Cette figure donne envie de tracer les deux bissectrices des angles verts. Cela va nous donner plein d'angles égaux et donc de triangles semblables.

Le triangle d'or

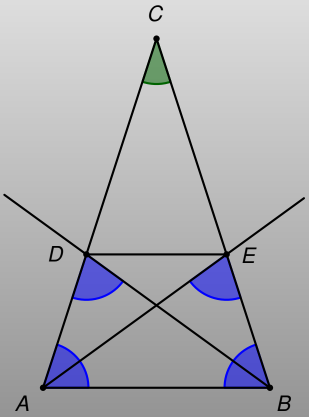


Partons d'un triangle d'or ABC avec les angles à la base (bleus) égaux à 72 degrés et l'angle au sommet (vert) de 36 degrés.

Cette figure donne envie de tracer les deux bissectrices des angles verts. Cela va nous donner plein d'angles égaux et donc de triangles semblables.

On notera D et E leurs intersections avec les côtés du triangle.

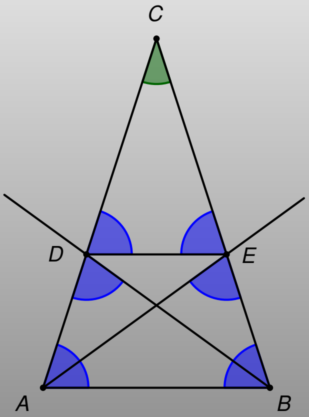
Le triangle d'or



Partons d'un triangle d'or ABC avec les angles à la base (bleus) égaux à 72 degrés et l'angle au sommet (vert) de 36 degrés.
Cette figure donne envie de tracer les deux bissectrices des angles verts. Cela va nous donner plein d'angles égaux et donc de triangles semblables.
On notera D et E leurs intersections avec les côtés du triangle.
Il y a beaucoup d'angles qu'on peut déterminer :

- Comme on a deux bissectrices, les deux angles bleus sont coupés en deux angles verts.
- La somme des angles du triangle ABD étant 180 degrés, l'angle $\widehat{ADB}$ fait 72 degrés. Idem du côté de E.

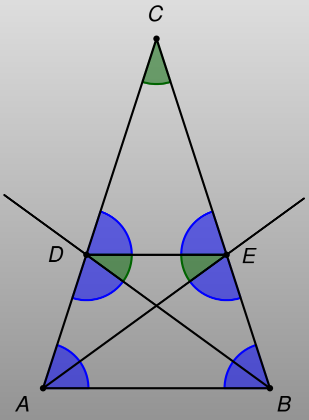
Le triangle d'or



Partons d'un triangle d'or ABC avec les angles à la base (bleus) égaux à 72 degrés et l'angle au sommet (vert) de 36 degrés.
Cette figure donne envie de tracer les deux bissectrices des angles verts. Cela va nous donner plein d'angles égaux et donc de triangles semblables.
On notera D et E leurs intersections avec les côtés du triangle.
Il y a beaucoup d'angles qu'on peut déterminer :

- Comme on a deux bissectrices, les deux angles bleus sont coupés en deux angles verts.
- La somme des angles du triangle ABD étant 180 degrés, l'angle $\widehat{ADB}$ fait 72 degrés. Idem du côté de E.
- Par symétrie, le triangle CDE est isocèle et les angles à la base font donc 72 degrés.

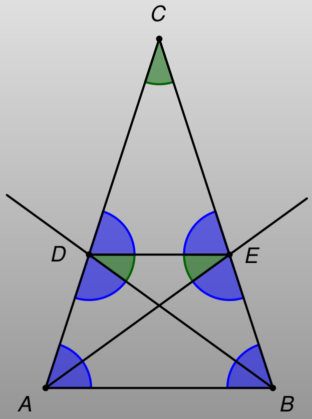
Le triangle d'or



Partons d'un triangle d'or ABC avec les angles à la base (bleus) égaux à 72 degrés et l'angle au sommet (vert) de 36 degrés.
Cette figure donne envie de tracer les deux bissectrices des angles verts. Cela va nous donner plein d'angles égaux et donc de triangles semblables.
On notera D et E leurs intersections avec les côtés du triangle.
Il y a beaucoup d'angles qu'on peut déterminer :

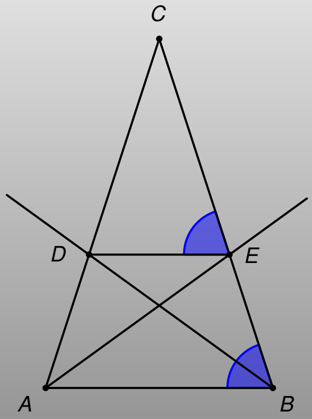
- Comme on a deux bissectrices, les deux angles bleus sont coupés en deux angles verts.
- La somme des angles du triangle ABD étant 180 degrés, l'angle $\widehat{ADB}$ fait 72 degrés. Idem du côté de E.
- Par symétrie, le triangle CDE est isocèle et les angles à la base font donc 72 degrés.
- Les angles restants en D et E font donc $180 - 2 \times 72 = 36$ degrés.

Le triangle d'or



On cherche $x = \frac{AB}{AC}$.

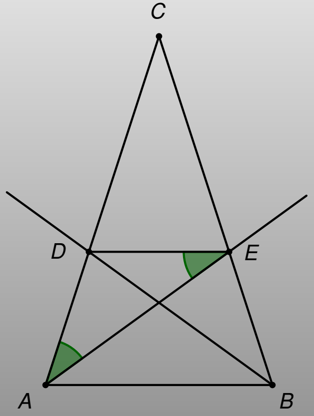
Le triangle d'or



On cherche $x = \frac{AB}{AC}$.

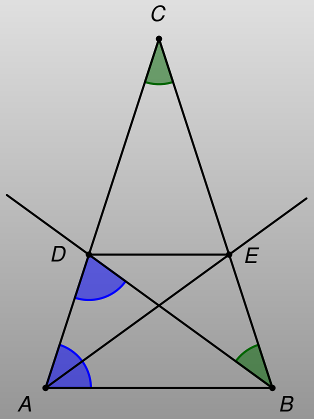
Les angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{CBA}$ étant égaux, (DE) et (AB) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour avoir $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$ donc $x = \frac{DE}{CD}$.

Le triangle d'or



On cherche $x = \frac{AB}{AC}$.
Les angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{CBA}$ étant égaux, (DE) et (AB) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour avoir $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$ donc $x = \frac{DE}{CD}$.
Le triangle AED est isocèle puisqu'il a deux angles égaux donc $DE = AD$.

Le triangle d'or



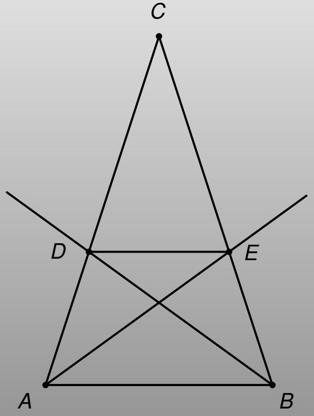
On cherche $x = \frac{AB}{AC}$.

Les angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{CBA}$ étant égaux, (DE) et (AB) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour avoir $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$ donc $x = \frac{DE}{CD}$.

Le triangle AED est isocèle puisqu'il a deux angles égaux donc $DE = AD$.

Les deux triangles BAD et BDC sont isocèles puisqu'ils ont des angles égaux donc $AB = BD = CD$.

Le triangle d'or



On cherche $x = \frac{AB}{AC}$.

Les angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{CBA}$ étant égaux, (DE) et (AB) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour avoir $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$ donc $x = \frac{DE}{CD}$.

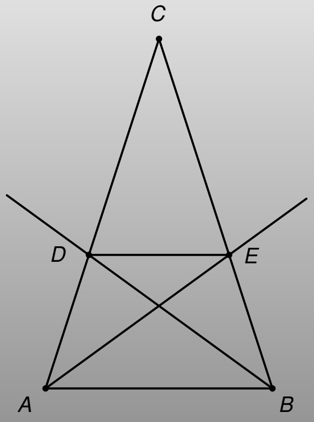
Le triangle AED est isocèle puisqu'il a deux angles égaux donc $DE = AD$.

Les deux triangles BAD et BDC sont isocèles puisqu'ils ont des angles égaux donc $AB = BD = CD$.

Si on recollecte tout, on a

$$x = \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC - CD}{AB} = \frac{1}{x} - 1 \ .$$

Le triangle d'or



On cherche $x = \frac{AB}{AC}$.

Les angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{CBA}$ étant égaux, (DE) et (AB) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour avoir $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$ donc $x = \frac{DE}{CD}$.

Le triangle AED est isocèle puisqu'il a deux angles égaux donc $DE = AD$.

Les deux triangles BAD et BDC sont isocèles puisqu'ils ont des angles égaux donc $AB = BD = CD$.

Si on recollecte tout, on a

$$x = \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC - CD}{AB} = \frac{1}{x} - 1 \ .$$

Que vaut x ?

Le triangle d'or

Il nous reste donc à trouver x qui vérifie

$$x = \frac{1}{x} - 1$$

ou, en multipliant tout par x et en passant tout du même côté,

$$x^2 + x - 1 = 0 \ .$$

On calcule le discriminant

$$\Delta = 1^2 - (4 \times (-1)) = 5 \ .$$

Les deux solutions de l'équation ci-dessus sont alors données par

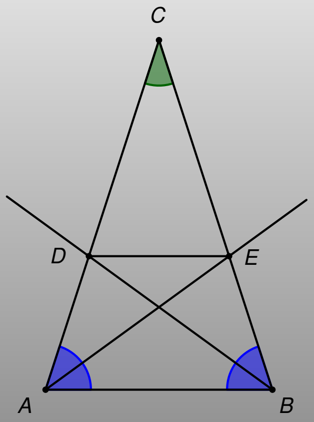
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Seule la solution positive peut être solution de notre problème (l'autre est négative et ne convient pas pour un rapport de longueur) donc

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

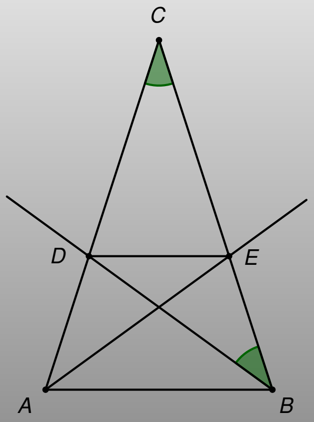
qu'on appelle le nombre d'or.

Le triangle d'or



On a donc montré que $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C'est-à-dire, dans un triangle isocèle dont les angles à la base font 72 degrés, le rapport entre la longueur de la base et la longueur des deux côtés égaux est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

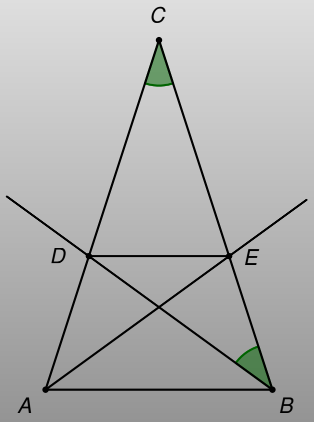
Le triangle d'or



On a donc montré que $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C'est-à-dire, dans un triangle isocèle dont les angles à la base font 72 degrés, le rapport entre la longueur de la base et la longueur des deux côtés égaux est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Intéressons-nous maintenant à un triangle isocèle dont les angles à la base sont égaux à 36 degrés car cela nous sera également utile ensuite. Prenons par exemple le triangle BCD avec ses deux angles verts de 36 degrés.

Le triangle d'or



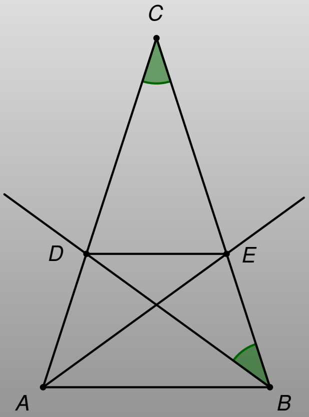
On a donc montré que $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C'est-à-dire, dans un triangle isocèle dont les angles à la base font 72 degrés, le rapport entre la longueur de la base et la longueur des deux côtés égaux est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Intéressons-nous maintenant à un triangle isocèle dont les angles à la base sont égaux à 36 degrés car cela nous sera également utile ensuite. Prenons par exemple le triangle BCD avec ses deux angles verts de 36 degrés.
On a

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} \text{ (voir plus haut)}$$

donc

$$\frac{BC}{BD} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Le triangle d'or



On a donc montré que $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C'est-à-dire, dans un triangle isocèle dont les angles à la base font 72 degrés, le rapport entre la longueur de la base et la longueur des deux côtés égaux est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Intéressons-nous maintenant à un triangle isocèle dont les angles à la base sont égaux à 36 degrés car cela nous sera également utile ensuite. Prenons par exemple le triangle BCD avec ses deux angles verts de 36 degrés.

On a

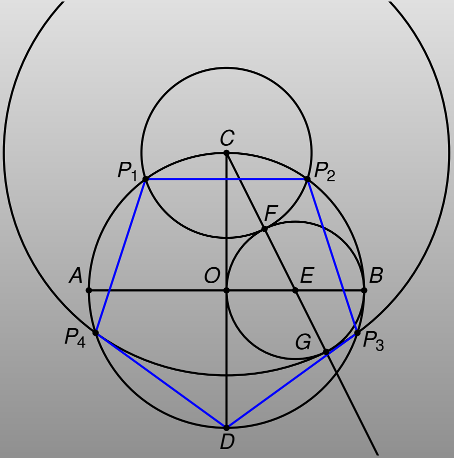
$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} \text{ (voir plus haut)}$$

donc

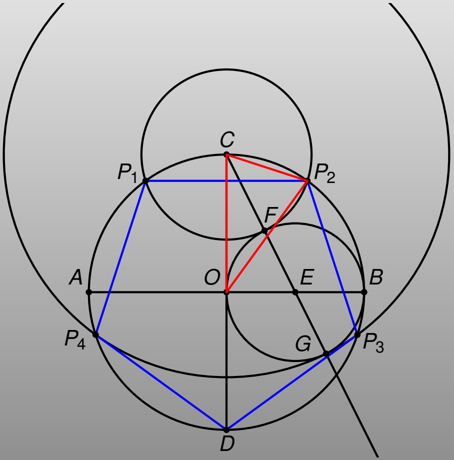
$$\frac{BC}{BD} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Dans un triangle isocèle dont les angles à la base font 36 degrés, le rapport entre la longueur de la base et la longueur des deux côtés égaux est $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

Construction à la règle et au compas - justification

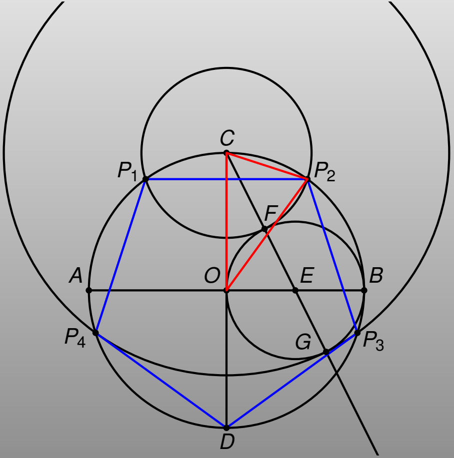


Construction à la règle et au compas - justification



On va montrer que le triangle OCP_2, en rouge, est un triangle d'or.

Construction à la règle et au compas - justification

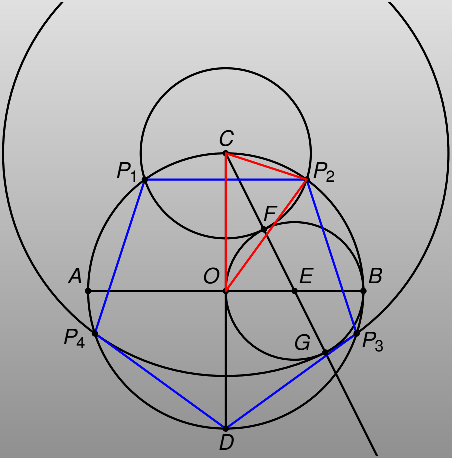


On va montrer que le triangle OCP_2, en rouge, est un triangle d'or.

Pour le faire, nous allons montrer que

$$\frac{CP_2}{OC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Construction à la règle et au compas - justification



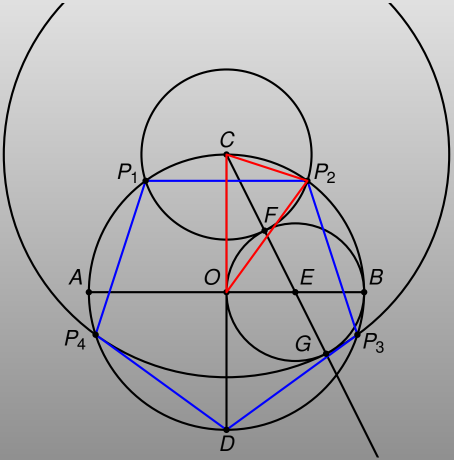
On va montrer que le triangle OCP_2, en rouge, est un triangle d'or.

Pour le faire, nous allons montrer que

$$\frac{CP_2}{OC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ainsi l'angle $\widehat{P_2OC}$ sera égal à 36 degrés, tout comme l'angle $\widehat{P_1OC}$ par symétrie et l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ sera de 72 degrés.

Construction à la règle et au compas - justification



On va montrer que le triangle OCP_2, en rouge, est un triangle d'or.

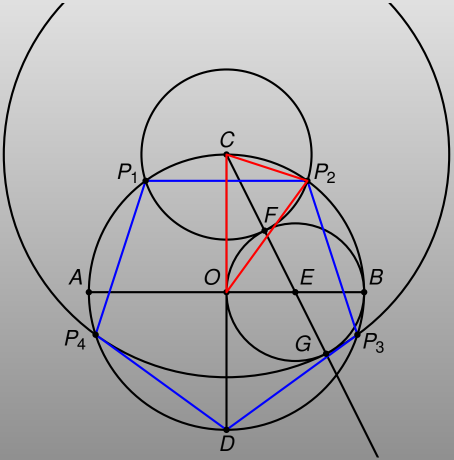
Pour le faire, nous allons montrer que

$$\frac{CP_2}{OC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ainsi l'angle $\widehat{P_2OC}$ sera égal à 36 degrés, tout comme l'angle $\widehat{P_1OC}$ par symétrie et l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ sera de 72 degrés.

Pour simplifier les notations, écrivons $OC = R$ et $CP_2 = y \times R$. Nous cherchons donc $y = \frac{CP_2}{OC}$.

Construction à la règle et au compas - justification



On va montrer que le triangle OCP_2, en rouge, est un triangle d'or.

Pour le faire, nous allons montrer que

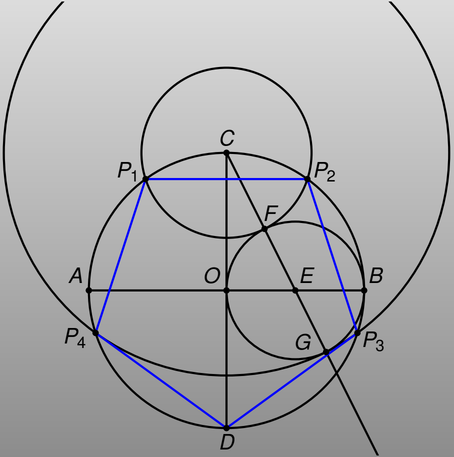
$$\frac{CP_2}{OC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ainsi l'angle $\widehat{P_2OC}$ sera égal à 36 degrés, tout comme l'angle $\widehat{P_1OC}$ par symétrie et l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ sera de 72 degrés.

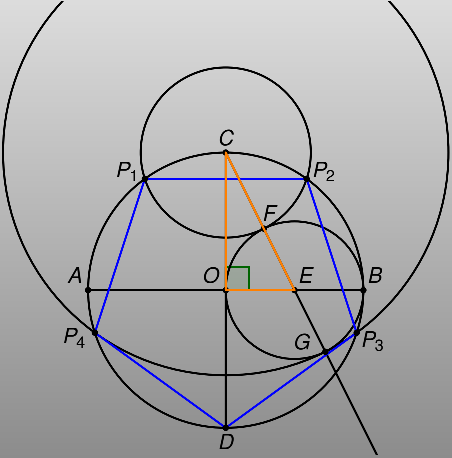
Pour simplifier les notations, écrivons $OC = R$ et $CP_2 = y \times R$. Nous cherchons donc $y = \frac{CP_2}{OC}$. Comme P_2 et F sont sur le même cercle de centre C, par construction, on a $CF = CP_2$.

Comme E est le milieu de [OB] et comme F est sur le cercle de centre E et de rayon $EO = \frac{1}{2}OC$, on a $EF = \frac{1}{2}OC$.

Construction à la règle et au compas - justification

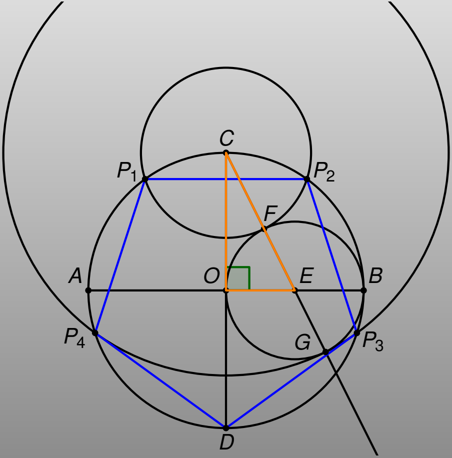


Construction à la règle et au compas - justification



On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction).

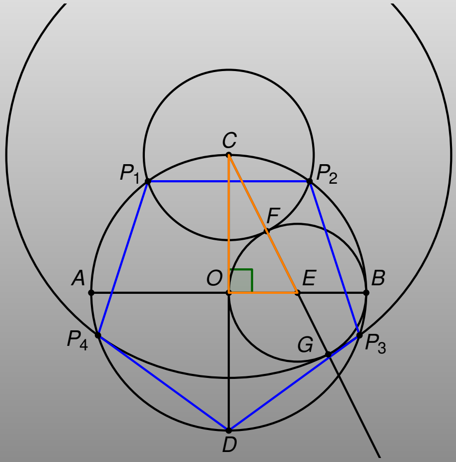
Construction à la règle et au compas - justification



On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction). Donc

$$OC^2 + OE^2 = CE^2 \; .$$

Construction à la règle et au compas - justification



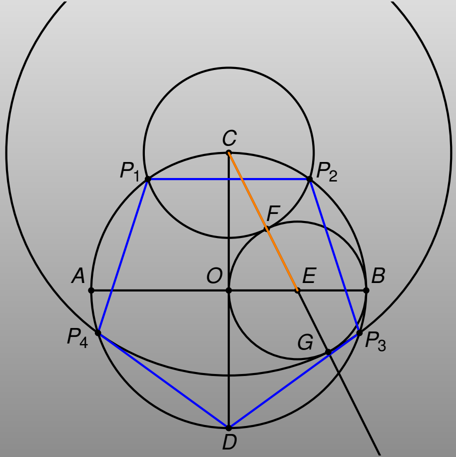
On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction). Donc

$$OC^2 + OE^2 = CE^2 \ .$$

Comme E est le milieu de $[OB]$, on a a $OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$ donc

$$CE^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{5}{4}R^2 \ .$$

Construction à la règle et au compas - justification



On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction). Donc

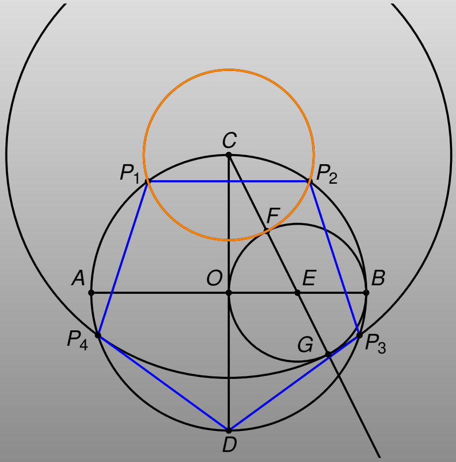
$$OC^2 + OE^2 = CE^2 \ .$$

Comme E est le milieu de $[OB]$, on a a $OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$ donc

$$CE^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{5}{4}R^2 \ .$$

Ceci donne $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}R$.

Construction à la règle et au compas - justification



On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction). Donc

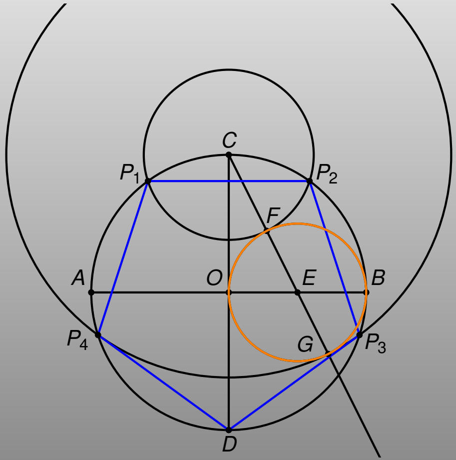
$$OC^2 + OE^2 = CE^2 \ .$$

Comme E est le milieu de [OB], on a a $OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$ donc

$$CE^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{5}{4}R^2 \ .$$

Ceci donne $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}R$.
Comme F et P_2 sont sur un cercle de centre C, on a $CF = CP_2 = yR$.

Construction à la règle et au compas - justification



On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction). Donc

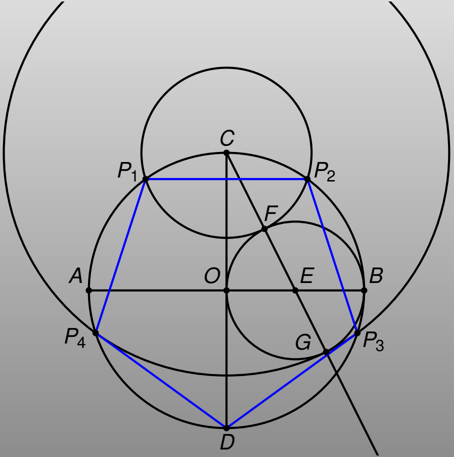
$$OC^2 + OE^2 = CE^2 \ .$$

Comme E est le milieu de $[OB]$, on a a $OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$ donc

$$CE^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{5}{4}R^2 \ .$$

Ceci donne $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}R$.
Comme F et P_2 sont sur un cercle de centre C, on a $CF = CP_2 = yR$.
Comme F et O sont sur un cercle de centre E, on a $EF = EO = \frac{1}{2}R$.

Construction à la règle et au compas - justification



On commence par appliquer le théorème de Pythagore au triangle COE rectangle en O (par construction). Donc

$$OC^2 + OE^2 = CE^2 \ .$$

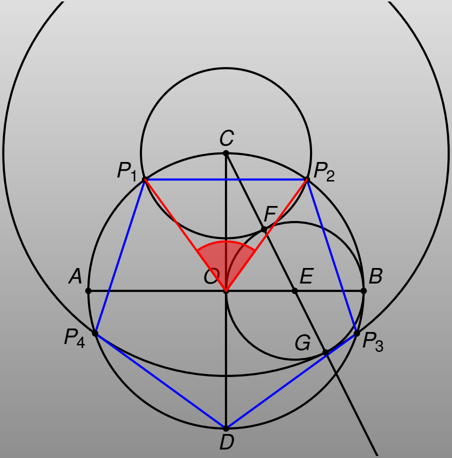
Comme E est le milieu de $[OB]$, on a a $OE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R$ donc

$$CE^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{5}{4}R^2 \ .$$

Ceci donne $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}R$.
Comme F et P_2 sont sur un cercle de centre C, on a $CF = CP_2 = yR$.
Comme F et O sont sur un cercle de centre E, on a $EF = EO = \frac{1}{2}R$.
Donc $CE = CF + EF = \left(\frac{1}{2} + y\right) R$ et donc

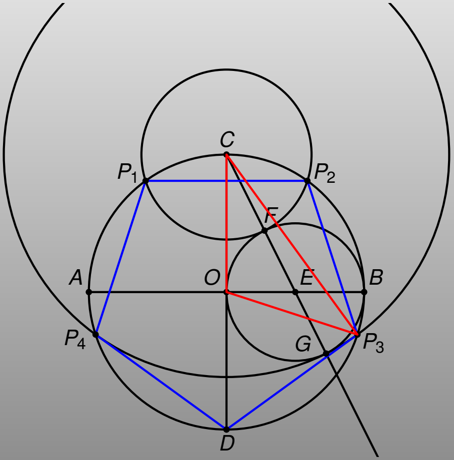
$$\left(\frac{1}{2} + y\right) R = \frac{\sqrt{5}}{2} R \text{ puis } y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Construction à la règle et au compas - justification



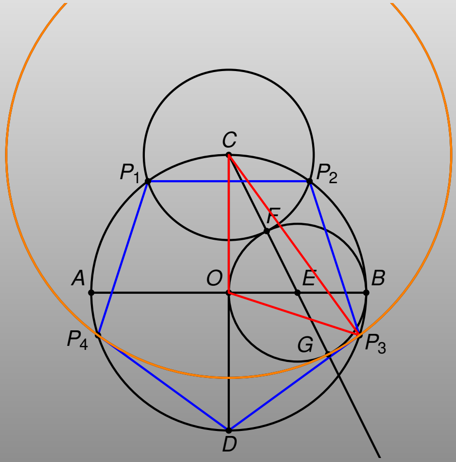
On a donc montré que l'angle $\widehat{P_1 O P_2}$ valait 72 degrés.

Construction à la règle et au compas - justification



On a donc montré que l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ valait 72 degrés.
Nous allons maintenant montrer que le triangle OCP_3 est isocèle avec deux angles de 36 degrés.

Construction à la règle et au compas - justification

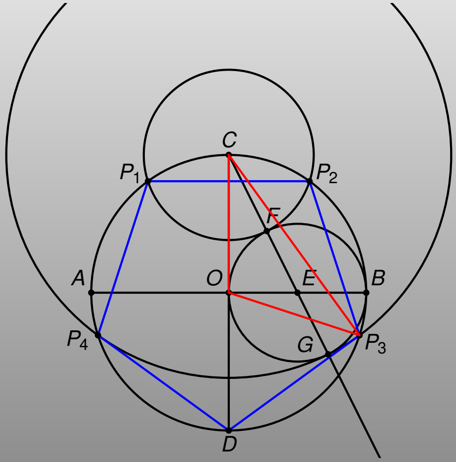


On a donc montré que l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ valait 72 degrés.
Nous allons maintenant montrer que le triangle OCP_3 est isocèle avec deux angles de 36 degrés.
Pour cela, on remarque que $CP_3 = CG$ puisque P_3 et G sont sur le même cercle de centre C. Comme $CG = CF + FG = yR + R = (y+1)\,R$, on a

$$\frac{CP_3}{OC} = y + 1 = \frac{1}{y}\left(y^2 + y\right) = \frac{1}{y}$$

car $y^2 + y = 1$.

Construction à la règle et au compas - justification



On a donc montré que l'angle $\widehat{P_1OP_2}$ valait 72 degrés.
Nous allons maintenant montrer que le triangle OCP_3 est isocèle avec deux angles de 36 degrés.
Pour cela, on remarque que $CP_3 = CG$ puisque P_3 et G sont sur le même cercle de centre C. Comme $CG = CF + FG = yR + R = (y+1)R$, on a

$$\frac{CP_3}{OC} = y + 1 = \frac{1}{y}\left(y^2 + y\right) = \frac{1}{y}$$

car $y^2 + y = 1$.
Cela montre que les angles en C et en P_3 de OCP_3 sont de 36 degrés (voir ci-dessus) et donc que l'angle $\widehat{COP_3}$ vaut $180 - 2 \times 36 = 108$ degrés. Comme l'angle $\widehat{COP_2}$ vaut 36 degrés, on en déduit que l'angle $\widehat{P_2OP_3}$ vaut 72 degrés. Par symétrie tous les angles en O avec des sommets consécutifs de notre pentagone bleu valent 72 degrés. Donc c'est un pentagone régulier.