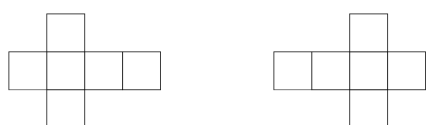


Il y en a 11 et seulement 11

Nous allons montrer qu'il y a 11 patrons de cube et seulement 11. On appelle patron de cube une série de 6 carrés (puisque le cube a 6 faces carrées) telle que :

- un carré a toujours au moins un voisin (un voisin étant un autre carré ayant une arête en commun).
- Quand on le découpe (quand on découpe le tour) et qu'on plie le long des arêtes communes, cela donne un cube.

De plus, nous dirons que deux patrons sont les mêmes lorsque nous pouvons les superposer. Ainsi, les deux patrons de cube suivants sont les mêmes :



puisqu'il suffit de retourner le deuxième pour le superposer au premier.

Pour tous les trouver, je ne connais pas d'autres moyens que de regarder exhaustivement tous les patrons possibles et de voir s'ils en sont vraiment ou pas. Nous allons donc tester toutes les configurations de carrés possibles. Afin de gagner du temps, une remarque s'impose : une configuration de 4 carrés disposés comme



ne donnera jamais un patron de cube !

Pour trouver toutes les configurations possibles, nous allons travailler à partir du nombre maximal de carrés alignés. Il peut y en avoir 6, 5, 4, 3, 2.

Alignement de 6 carrés

Si on aligne 6 carrés :



cela ne donnera pas un patron de cube puisque les deux carrés bleus vont venir se mettre au même endroit.

Alignement de 5 carrés

De la même façon, si on aligne 5 carrés :



où que l'on mette le sixième, cela ne donnera pas un patron de cube puisque les deux carrés bleus vont venir se mettre au même endroit.

Alignement de 4 carrés

On part de 4 carrés alignés :



Pour mettre le 5ème, nous avons deux possibilités :



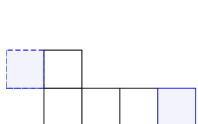
4A



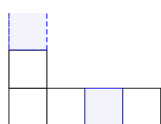
4B

Pourquoi seulement deux ? Parce que le mettre au-dessus ou en-dessous revient au même, quitte à retourner le patron. Parce que le mettre au-dessus du premier ou du quatrième revient au même, quitte à retourner le patron. Parce que le mettre au-dessus du deuxième ou du troisième revient au même, quitte à retourner le patron.

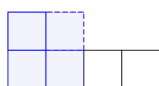
Prenons la première configuration (4A) ci-dessus. On peut alors regarder toutes les possibilités de mettre le sixième carré, sachant qu'on ne peut pas le mettre sur la ligne de 4 carrés (on a déjà traité le cas de 5 carrés alignés) :



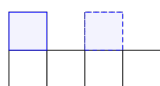
4A-1



4A-2



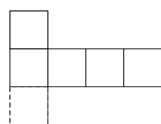
4A-3



4A-4



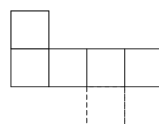
4A-5



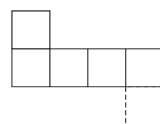
4A-6



4A-7



4A-8



4A-9

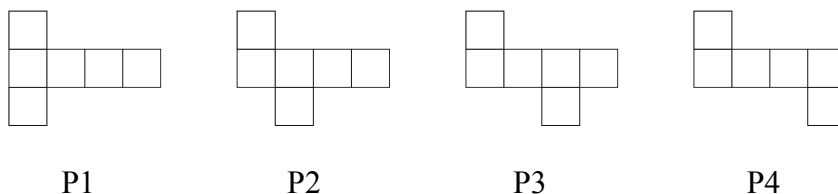
Les configurations 4A-1, 4A-2, 4A-4 et 4A-5 ne donnent pas un patron de cube car les carrés bleus viennent se mettre au même endroit.

La configuration 4A-3 ne convient pas car quatre carrés sont collés ensemble.

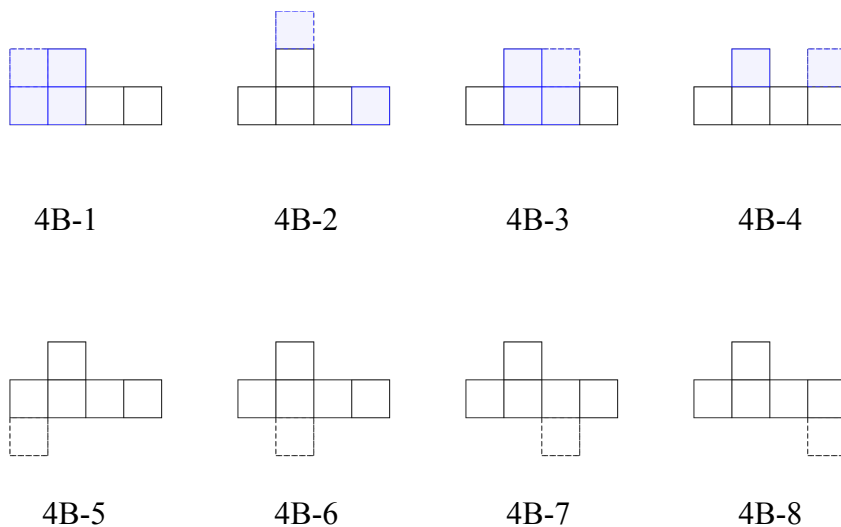
Vous pouvez vérifier (en découpant et pliant, ou en visualisant) que les configurations 4A-6, 4A-7,

4A-8 et 4A-9 donnent bien des patrons de cube et ne sont pas superposables.

Nous avons ainsi nos 4 premiers patrons de cube :



Prenons la deuxième configuration (4B) ci-dessus. On peut alors regarder toutes les possibilités de mettre le sixième carré, sachant qu'on ne peut pas le mettre sur la ligne de 4 carrés (on a déjà traité le cas de 5 carrés alignés) :

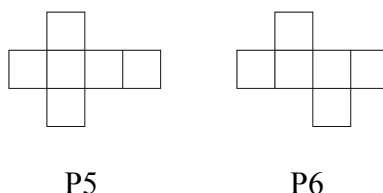


Les configurations 4B-1 et 4B-3 ne conviennent pas car 4 carrés sont collés ensemble. Notez que la configuration 4B-1 est la même que 4A-3.

Les configurations 4B-2 et 4B-4 ne conviennent pas car les carrés bleus vont venir se mettre au même endroit. Notez que la configuration 4B-4 est la même que 4A-4.

Enfin, les configurations 4B-5, 4B-6, 4B-7 et 4B-8 sont bien des patrons de cube. Mais seules 4B-6 et 4B-8 sont nouvelles. En effet, 4B-5 est la même que P2 et 4B-8 que P3.

Nous avons ainsi obtenu 2 patrons de cube supplémentaires :



Conclusion : les seuls patrons de cube avec 4 carrés alignés sont les numéros P1, P2, P3, P4, P5 et P6.

Alignement de 3 carrés

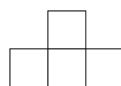
On part de 3 carrés alignés :



Il y a deux possibilités pour mettre le 4ème carré. En effet, le mettre au-dessus ou en-dessous revient au même, à retournement près, et le mettre en 1ère position ou en 3ème également. Enfin, il n'est pas possible de le mettre sur la même ligne puisque le cas de 4 carrés alignés a déjà été traité.

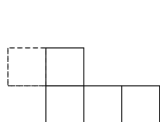


3A

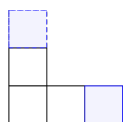


3B

Dans la configuration 3A, le cinquième peut être placé de 7 façons différentes :



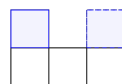
3Aa



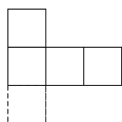
3Ab



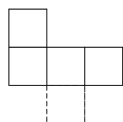
3Ac



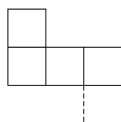
3Ad



3Ae



3Af

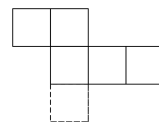
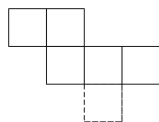
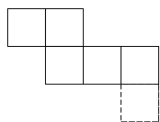
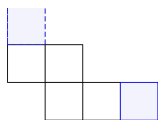
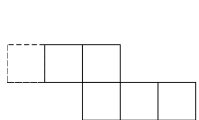


3Ag

La configuration 3Ac est impossible car 4 carrés sont collés ensemble. Les configurations 3Ab et 3Ad ne donneront pas un patron de cube puisque les carrés bleus se retrouveront nécessairement au même endroit.

Il reste donc à traiter les configurations 3Aa, 3Ae, 3Af et 3Ag. A chaque fois, il y a beaucoup de possibilités pour mettre le cinquième carré. Mais certaines d'entre elles peuvent être éliminées directement car elles reviennent à des configurations déjà traitées (4 carrés alignés) ou à des configurations parmi 3Ab, 3Ac, 3Ad. Nous éliminerons aussi directement toutes les configurations où 4 carrés sont collés ensemble.

Ainsi, pour 3Aa, nous avons les possibilités suivantes :



3Aa-1

3Aa-2

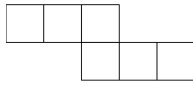
3Aa-3

3Aa-4

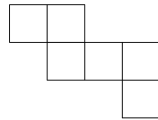
3Aa-5

Il n'y a plus qu'à vérifier que 4 d'entre elles donnent un patron de cube tandis que la 5ème, 3Aa-2, ne convient pas, toujours pour la même raison (les deux carrés bleus vont venir se mettre au même endroit).

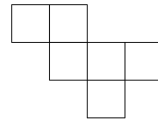
Nous avons donc obtenu 4 nouveaux patrons de cube :



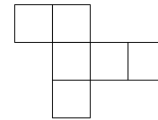
P7



P8

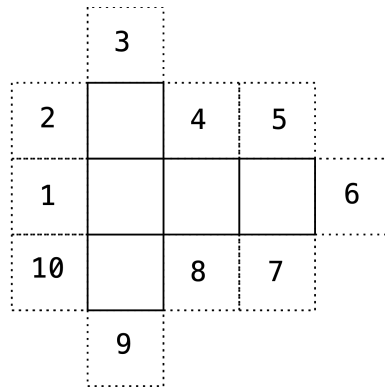


P9



P10

Si on étudie la configuration 3Ae, on se rend compte que toutes les situations lorsqu'on ajoute le 6ème carré ont déjà été traitées ou ont 4 carrés collés ensemble. Plus précisément, voici une un dessin toutes les possibilités de mettre le 6ème carré :



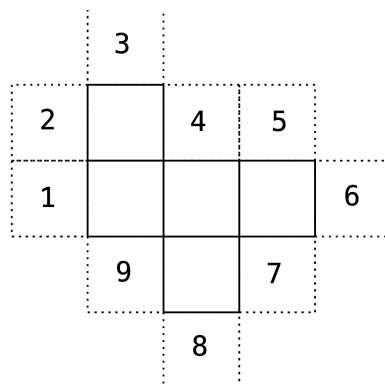
Les positions 1, 3, 6 et 9 correspondent à 4 carrés alignés (déjà traité).

Les positions 2 et 10 sont les mêmes que P10.

Les positions 4 et 8 contiennent 4 carrés collés ensemble.

Les positions 5 et 7 contiennent la configuration 3Ad dont a déjà vu qu'elle était impossible.

On peut faire de même avec la configuration 3Af :



Les positions 1 et 6 correspondent à 4 carrés alignés (déjà traité).

La position 2 est la même que P9.

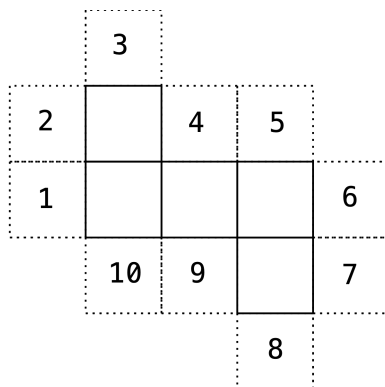
La position 3 contient la configuration 3Ab dont a déjà vu qu'elle était impossible.

Les positions 4, 7 et 9 contiennent 4 carrés collés ensemble.

La position 5 contient la configuration 3Ad dont a déjà vu qu'elle était impossible.

La position 8 est la même que P10 après retournement.

Et enfin, on peut vérifier que la configuration 3Ag ne donne rien de nouveau :



Les positions 1 et 6 correspondent à 4 carrés alignés (déjà traité).

Les positions 2 et 7 sont les mêmes que P8.

Les positions 3 et 8 contiennent la configuration 3Ab dont a déjà vu qu'elle était impossible.

Les positions 4 et 9 contiennent 4 carrés collés ensemble.

Les positions 5 et 10 contiennent la configuration 3Ad dont a déjà vu qu'elle était impossible.

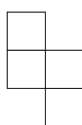
Conclusion : les seuls patrons de cube contenant 3 carrés alignés et pas 4 sont P7, P8, P9 et P10

Alignement de 2 carrés

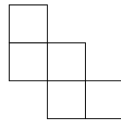
Une fois qu'on a deux carrés alignés, nous n'avons pas le choix pour le troisième. On ne peut pas le mettre sur la même ligne et les quatre autres possibilités sont toutes équivalentes. Nous sommes donc dans la situation suivante :



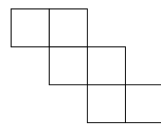
Il n'y a pas beaucoup de possibilités pour le quatrième carré sachant qu'on ne peut pas en aligner trois (cas déjà traité) et qu'on ne peut pas coller quatre carrés ensemble. Il n'y a que deux possibilités et ce sont les mêmes (elles sont superposables). Nous arrivons donc à



Pour le cinquième carré, encore une fois, nous n'avons que deux possibilités équivalentes, pour les mêmes raisons que ci-dessus. Nous arrivons donc à



Et enfin, pour le dernier, nous n'avons pas le choix non plus puisque nous n'avons toujours pas le droit d'en aligner 3 et nous ne pouvons coller 4 carrés ensemble. Les deux seules positions possibles sont encore une fois superposables et il ne reste donc que



P11

qui est un patron de cube.

CONCLUSION : Nous avons donc trouver 11 patrons de cube distincts et nous sommes certains de tous les avoir puisque nous avons été méthodiques. C'est un peu fastidieux... mais avec un peu de patience, cela prouve l'assertion.